Zomercursus Wiskunde B

Week 2, les 4

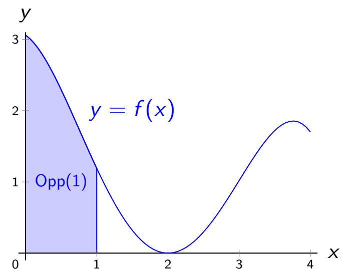
Jolien Oomens
J.J.Oomens@uva.nl

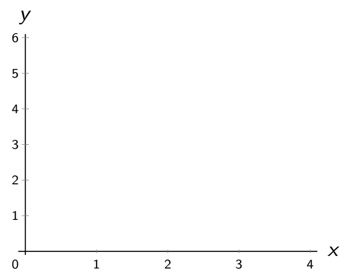
Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

14 juli 2017

Oppervlakte en afgeleide

We bekijken de grafiek van een functie f:





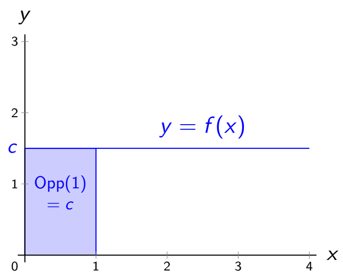
Schrijf $\text{Opp}(x)$ voor de oppervlakte onder de grafiek van f tussen 0 en x.

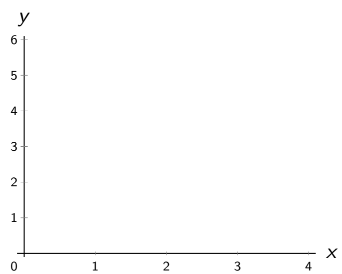
We zien dat de helling van Opp overeenkomt met de oorspronkelijke functie f: er geldt $\text{Opp}'(x) = f(x)$.

Dus: als we de oppervlakte onder de grafiek van f willen berekenen, zoeken we een functie met afgeleide f.

Oppervlakte en afgeleide

Neem als voorbeeld $f(x) = c$.



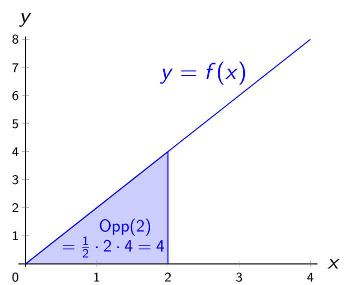


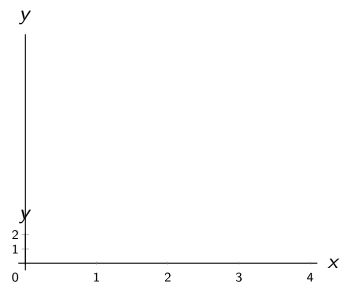
Schrijf $\text{Opp}(x)$ voor de oppervlakte onder de grafiek van f tussen 0 en x.

Er geldt $\text{Opp}(x) = cx$. We zien dat $\text{Opp}'(x) = c = f(x)$.

Oppervlakte en afgeleide

Neem als voorbeeld $f(x) = 2x$.





Schrijf $\text{Opp}(x)$ voor de oppervlakte onder de grafiek van f tussen 0 en x.

Er geldt $\text{Opp}(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2x = x^2$. We zien dat $\text{Opp}'(x) = 2x = f(x)$.

Primitieven

Een *primitieve* van een functie f is een functie F met de eigenschap dat $F'(x) = f(x)$. Voorbeelden:

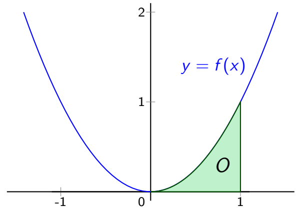
$$f(x) = x \qquad F(x) = \tfrac{1}{2}x^2$$

$f(x)$	$f'(x)$
1	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$

$f(x)$	$F(x)$	
1	x	
x	$\frac{1}{2}x^2$	
x^2	$\frac{1}{3}x^3$	
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$(n \neq -1)$
x^{-1}	$\ln\lvert x\rvert$	
e^x	e^x	
$\cos x$	$\sin x$	
$\sin x$	$-\cos x$	
a^x	$\frac{1}{\ln a}a^x$	

Oppervlakte

Bekijk de grafiek van $f(x) = x^2$. Wat is de oppervlakte O onder de grafiek van f tussen $x = 0$ en $x = 1$?



Deze oppervlakte schrijven we als de *integraal* van f:

$$O = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3},$$

met $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ een primitieve van f.

Oppervlakte en integraal

De oppervlakte tussen $x = a$ en $x = b$ onder de grafiek van een functie f met primitieve F wordt gegeven door

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Voorbeelden van integralen:

$$\int_0^4 (e^x - x)\,\mathrm{d}x = \big[e^x - \tfrac{1}{2}x^2\big]_0^4$$
$$= e^4 - \tfrac{16}{2} - (e^0 - 0) = e^4 - 9$$

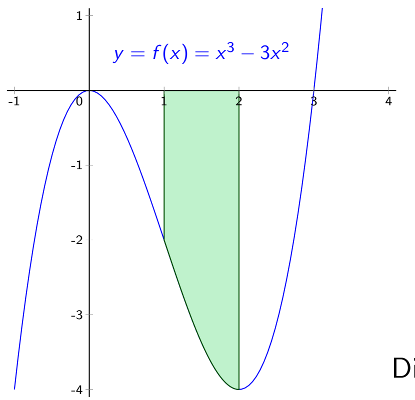
$$\int_\pi^{2\pi} (3 + 2\sin x)\,\mathrm{d}x = [3x - 2\cos x]_\pi^{2\pi}$$
$$= 6\pi - 2 - (3\pi + 2) = 3\pi - 4$$

$f(x)$	$F(x)$
1	x
x	$\frac{1}{2}x^2$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
x^{-1}	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
a^x	$\frac{1}{\ln a}a^x$

Oppervlakte en integraal

De oppervlakte tussen $x = a$ en $x = b$ onder de grafiek van een functie f met primitieve F wordt gegeven door

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a).$$



De oppervlakte van het gearceerde stuk vinden we met

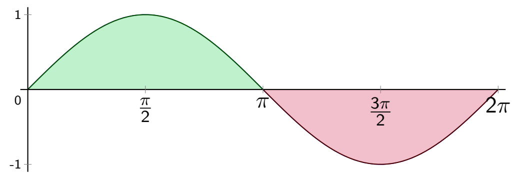
$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 (x^3 - 3x^2)\,\mathrm{d}x$$
$$= \big[\tfrac{1}{4}x^4 - x^3\big]_1^2$$
$$= \tfrac{1}{4}\cdot 2^4 - 2^3 - \big(\tfrac{1}{4} - 1\big)$$
$$= 4 - 8 - \tfrac{1}{4} + 1$$
$$= -3 - \tfrac{1}{4} = -3\tfrac{1}{4}.$$

Dit is negatief! De oppervlakte is $3\frac{1}{4}$.

Negatieve oppervlaktes

Als een functie negatief is, wordt de integraal ook negatief. Zo ook

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 = -1 + 1 = 0.$$



$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = \int_0^{\pi} \sin x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx$$
$$= [-\cos x]_0^{\pi} + [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} = 1 - (-1) + (-1 - 1) = 0.$$

Totale oppervlakte: bereken beide stukken apart, maak de antwoorden positief en tel ze op. Hier: $2 + 2 = 4$.

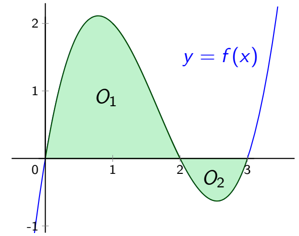
Voorbeeld

Bekijk $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$. Bereken de totale oppervlakte tussen de grafiek van f en de x-as.

$$O_1 = \int_0^2 (x^3 - 5x^2 + 6x) \, dx = \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{5}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^2$$
$$= \tfrac{1}{4} \cdot 16 - \tfrac{5}{3} \cdot 8 + 3 \cdot 4 = 4 - \tfrac{40}{3} + 12 = 16 - \tfrac{40}{3} = \tfrac{8}{3}.$$
$$O_2 = \int_2^3 (x^3 - 5x^2 + 6x) \, dx = \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{5}{3}x^3 + 3x^2\right]_2^3$$
$$= \tfrac{1}{4} \cdot 3^4 - \tfrac{5}{3} \cdot 3^3 + 3^3 - \tfrac{8}{3} = \tfrac{3^4}{4} - 5 \cdot 3^2 + 3^3 - \tfrac{8}{3} = -\tfrac{5}{12}.$$

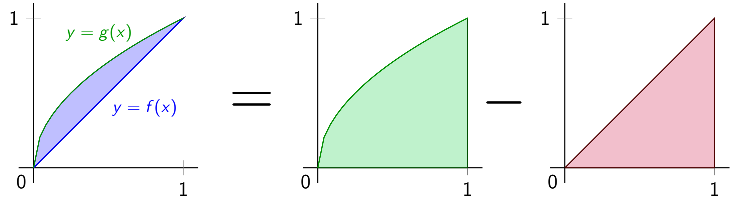
De totale oppervlakte is nu

$$\frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{32}{12} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}.$$



Oppervlakte tussen functies

Bekijk $f(x) = x$ en $g(x) = \sqrt{x}$. Wat is de oppervlakte tussen deze twee functies?



$$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}} \, dx - \int_0^1 x \, dx = \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 - \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$= \left[\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{6}$$
$$= \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x) \, dx.$$

Meer primitieven

Een primitieve van $\cos x$ is $\sin x$. Geef een primitieve van $\cos(2x)$. We weten $[\sin(2x)]' = 2\cos(2x)$. Dus

$$\left[\tfrac{1}{2}\sin(2x)\right]' = \tfrac{1}{2} \cdot 2\cos(2x) = \cos(2x).$$

Meer algemeen is $\frac{1}{a}\sin(ax)$ een primitieve van $\cos(ax)$. Zo ook:

f(x)	F(x)	$f(x)$	$F(x)$	
$\sin(3x)$	$-\frac{1}{3}\cos(3x)$	1	x	
$\cos(x+2)$	$\sin(x+2)$	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$(n \neq -1)$
e^{5x}	$\frac{1}{5}e^{5x}$	x^{-1}	$\ln\lvert x\rvert$	
$\sqrt{x+1}$	$\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$	e^x	e^x	
2^{x+5}	$\frac{1}{\ln 2}2^{x+5}$	$\cos x$	$\sin x$	
2^{-x}	$-\frac{1}{\ln 2}2^{-x}$	$\sin x$	$-\cos x$	
		a^x	$\frac{1}{\ln a}a^x$	

Algemeen: de primitieve van $f(ax+b)$ is $\frac{1}{a}F(ax+b)$.

Opgaven en indeling

Opgaven

21.21, 21.22, 21.23, 21.24 b, 21.13, 21.14, 21,15, 21.16, extra.

Antwoorden van de opgaven staan achterin, uitwerkingen van de extra opgaven op http://www.bliggy.net/cursusB.html.

Groepen

De indeling is op basis van je achternaam:

- A t/m D: zaal A1.14 (Gideon Jager)
- E t/m Kuhl: zaal A1.30 (Jeroen Eijkens)
- Kuhlhan t/m Seydel: zaal D1.114 (Sebastian Zur)
- Simsir t/m Z: zaal D1.116 (Thijs Benjamins)