Zomercursus Wiskunde B

Week 3, les 2

Jolien Oomens
J.J.Oomens@uva.nl

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

18 juli 2017

Rekenen met machten

Schrijf zonder gebroken of negatieve machten

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$
$$3^{-1} = \tfrac{1}{3}$$
$$3^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$
$$3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{3}\cdot 2} = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{3}\right)^2$$
$$= 3^{2\cdot\frac{1}{3}} = \left(3^2\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$$
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Regels voor machtsverheffen

$$g^{a+b} = g^a g^b$$
$$g^0 = 1$$
$$g^{-a} = \tfrac{1}{g^a}$$
$$g^{b-a} = \tfrac{g^b}{g^a}$$
$$\left(g^a\right)^b = g^{ab}$$
$$(gh)^a = g^a h^a$$
$$g^{1/a} = \sqrt[a]{g}$$

Rekenen met logaritmes

Herinner: ${}^{g}\log a$ is de oplossing x van $g^x = a$.
In het bijzonder is ${}^{g}\log g^b$ de oplossing van de vergelijking $g^x = g^b$, dus ${}^{g}\log g^b = b$.

$$^{2}\log 2 = 1$$
$$^{3}\log \sqrt{3} = {}^{3}\log 3^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}$$
$$^{4}\log 2 = {}^{4}\log \sqrt{4} = {}^{4}\log 4^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}$$

De natuurlijke logaritme is $\ln x = {}^{e}\log x$.

$$\ln e^5 = 5$$
$$\ln(e\sqrt{e}) = \ln\left(e \cdot e^{\frac{1}{2}}\right) = \ln e^{\frac{3}{2}} = \tfrac{3}{2}$$
$$\ln \tfrac{1}{e^2} = \ln e^{-2} = -2$$

Regels voor machtsverheffen

$$g^{a+b} = g^a g^b$$
$$g^0 = 1$$
$$g^{-a} = \tfrac{1}{g^a}$$
$$g^{b-a} = \tfrac{g^b}{g^a}$$
$$\left(g^a\right)^b = g^{ab}$$
$$(gh)^a = g^a h^a$$
$$g^{1/a} = \sqrt[a]{g}$$

Eenvoudige vergelijkingen

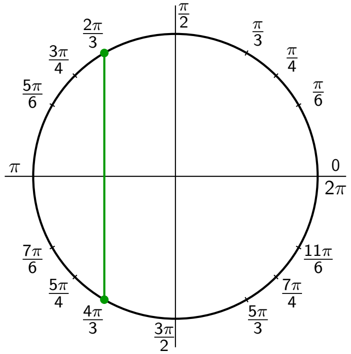
- Exponentiële vergelijking $g^x = a \quad \Rightarrow \quad x = {}^{g}\log a$.
- Logaritmische vergelijking ${}^{g}\log x = a \quad \Rightarrow \quad x = g^a$.
- Machten: $x^a = b \quad \Rightarrow \quad x = b^{\frac{1}{a}}$ (mogelijk ook $x = -b^{\frac{1}{a}}$).

$$2^x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = {}^{2}\log 3$$
$$^{2}\log x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 2^3 = 8$$
$$x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \qquad \text{of} \quad x = -\sqrt{3}$$
$$x^{\frac{2}{3}} = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 3^{\frac{3}{2}} = \left(3^3\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{27} \qquad \text{of} \quad x = -\sqrt{27}$$
$$x^{-\frac{2}{3}} = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 3^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{27}} \qquad \text{of} \quad x = -\frac{1}{\sqrt{27}}$$
$$x^3 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{3}$$
$$x^{\frac{3}{2}} = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 3^{\frac{2}{3}} = \left(3^2\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{9}$$

Goniometrische vergelijkingen

Bij vergelijkingen als $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ kun je de tabel en cirkel gebruiken:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1



De oplossingen zijn $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ en $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$ met k geheel.

Vergelijkingen: vervolg

Bij het oplossen van ingewikkeldere vergelijkingen helpt het om dingen buiten haakjes te halen:

$$2xe^x - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(2e^x - 1) = 0.$$

Hiermee vinden we $x = 0$ of $2e^x - 1 = 0$. Dit laatste geeft $x = \ln\frac{1}{2}$

Als er $\sin 2x$ of $\cos 2x$ in de vergelijking voorkomt helpen de formules $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ en $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

$$\begin{aligned} \sin 2x - \sin x = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2\sin x\cos x - \sin x = 0 \\ &\Rightarrow \quad (\sin x)(2\cos x - 1) = 0, \end{aligned}$$

dus $\sin x = 0$ of $2\cos x - 1 = 0$. De eerste geeft $x = 0 + k\cdot 2\pi$ of $x = \pi - 0 + k\cdot 2\pi$. De tweede:

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x = -\frac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi.$$

Substituties

Bekijk de vergelijking $\ln^2(x) + 8\ln(x) + 15 = 0$. Deze ziet er ingewikkeld uit, maar als we $y = \ln(x)$ schrijven krijgen we

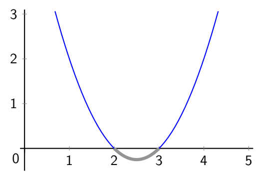
$$y^2 + 8y + 15 = (y+3)(y+5) = 0 \implies y = -3 \text{ of } y = -5,$$

oftewel $\ln(x) = -3$ en $\ln(x) = -5$. De oorspronkelijke vergelijking heeft dus de oplossingen $x = e^{-3}$ en $x = e^{-5}$. Deze strategie wordt *substitutie* genoemd.

Probeer dit nu zelf met de vergelijking $4^x - 2^{x+1} + 1 = 0$ en $y = 2^x$. We krijgen $y^2 - 2y + 1 = (y-1)^2 = 0$, dus $y = 1$. Vervolgens lossen we $1 = 2^x$ op, dit geeft $x = 0$. Deze waarde zit niet in het domein van $\ln(x)$, dus de vergelijking heeft geen oplossingen.

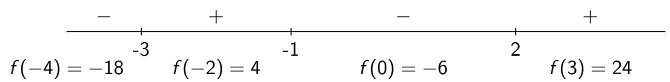
Ongelijkheden

Om een ongelijkheid van de vorm $x^2 - 5x + 6 < 0$ op te lossen, lossen we eerst de vergelijking $x^2 - 5x + 6 = 0$ op. We krijgen dan $(x-2)(x-3) = 0$, dus $x = 2$ en $x = 3$. We kijken dan naar de grafiek om te zien waar hij kleiner dan 0 is:



$$\Rightarrow \quad 2 < x < 3$$

Wat doen we als de grafiek niet direct duidelijk is, zoals bij de ongelijkheid $f(x) = (x-2)(x+1)(x+3) \leq 0$?



Dus de ongelijkheid geldt voor $-1 \leq x \leq 2$ en voor $x \leq -3$.

Breuken

- Optellen met gelijke noemers: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$.
- Anders gelijknamig maken: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$.
- Vermenigvuldigen: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.
- Delen is vermenigvuldigen met het omgekeerde: $a/\frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b}$.
- Vereenvoudigen: $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$.

$$\frac{x^3 - x^2}{4x^2} = \frac{x^2(x-1)}{4x^2} = \frac{x-1}{4}, \quad x \neq 0$$

$$\frac{(x-1)\ln x - (x-1)^2 e^x}{(x-1)^3} = \frac{\ln x - (x-1)e^x}{(x-1)^2}$$

$$\frac{(x-1) + (1-x)e^x}{x-1} = \frac{(x-1) - (x-1)e^x}{x-1} = 1 - e^x, \quad x \neq 1$$

Opgaven en indeling

Opgaven

extra

De antwoorden staan op de achterkant.

Groepen

De indeling is op basis van je achternaam:

- A t/m D: zaal A1.06 (Gideon Jager)
- E t/m Kuhl: zaal A1.130 (Jeroen Eijkens)
- Kuhlhan t/m Seydel: zaal D1.114 (Sebastian Zur)
- Simsir t/m Z: zaal D1.116 (Thijs Benjamins)