2 Oplossingen extra opgaven: kwadratische functies

Opgave 2.1.

a. $0 = ax^2 + bx \quad \Rightarrow \quad 0 = x(ax + b) \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad$ of $\quad x = -b/a$

b. De top van een parabool ligt in het midden tussen de twee nulpunten. Dan is de x-coördinaat van top van $f(x)$ gelijk aan het gemiddelde:

$$\frac{0 + (-b/a)}{2} = -\frac{b}{2a}$$

c. Door c te veranderen schuift de hele parabool omhoog of omlaag. De top schuift mee, dus c verandert de y-coördinaat van de top en doet niets met de x-coördinaat. Dus de x-coördinaat van de top van $f(x) = ax^2+bx+c$ zal dezelfde zijn als die van $f(x) = ax^2+bx$, ofwel $-b/(2a)$. Dit gaan we even na. De x-coördinaat kunnen we berekenen door het gemiddelde te nemen van de twee nulpunten gevonden met de abc-formule:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-b+\sqrt{D}-b-\sqrt{D}}{2a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-b}{a}\right) = -\frac{b}{2a}$$

Opgave 2.2.

a. Uit de grafiek volgt dat $g(x) \leq 0$ voor alle x.

b. We lossen $f(x) = g(x)$ op:

$$x^2 - 3x - 2 = -x^2 + 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 5x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{4}$$

c. We zien in de grafiek dat $f(x) \leq g(x)$ precies tussen de twee snijpunten, dus

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{voor} \quad \frac{5-\sqrt{33}}{4} \leq x \leq \frac{5+\sqrt{33}}{4}$$