11 Uitwerkingen extra opgaven: herhaling

Opgave 11.1.

a. e^x

b. $e^{5x} \cdot 5$

c. $e^{x+2} \cdot 1$

d. $e^{5x+2} \cdot 5$

e. $\cos(3x-1) \cdot 3$

f. $\frac{1}{\ln 3(3-2x)} \cdot -2$

g. $\ln 2 2^{-x} \cdot -1$

h. $18(5-x)^{17} \cdot -1$

i. $6(2-3x)^5 \cdot -3$

j. $\frac{1}{x}$

k. $\frac{1}{-x} \cdot -1 = \frac{1}{x}$

l. $\frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{1}{x}$

Opgave 11.5.

a.
$$\int_0^1 x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x x^{1/2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{3/2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^1 = \frac{2}{5}$$

b.
$$\int_0^{2\pi} \sin(x+\pi)\,\mathrm{d}x = \big[-\cos(x+\pi)\big]_0^{2\pi} = -\cos(3\pi) - \big(-\cos(\pi)\big) = -1+1 = 0$$

c.
$$\begin{aligned}\int_1^2 \sqrt{x+8}\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 (x+8)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}(x+8)^{3/2}\right]_1^2 = \frac{2}{3}\big(10^{3/2} - 9^{3/2}\big)\\ &= \frac{2}{3}\big(\sqrt{10^3} - 26\big) = \frac{2\sqrt{1000}}{3} - 18\end{aligned}$$

d.
$$\int_{-1}^1 e^{3x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{3}\big(e^3 - e^{-3}\big)$$

e.
$$\int_0^1 \cos(7\pi x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{7\pi}\sin(7\pi x)\right]_0^1 = \frac{1}{7\pi}\big(\sin(7\pi) - \sin 0\big) = 0$$

f.
$$\int_0^1 2^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\ln 2}2^{-x}\right]_0^1 = -\frac{1}{\ln 2}\big(2^{-1} - 2^0\big) = -\frac{1}{\ln 2}\cdot -\frac{1}{2} = \frac{1}{2\ln 2}$$

Opgave 11.7.

a. We stellen de twee functies aan elkaar gelijk en lossen het voor x op:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{x} - x^2 = \tfrac{1}{2}x^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} = \tfrac{3}{2}x^2 \\ &\Rightarrow \quad 1 = \tfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad x^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = a \end{aligned}$$

b. We berekenen de afgeleide van f:

$$f'(x) \quad = \quad [\sqrt{x} - x^2]' \quad = \quad [x^{\frac{1}{2}} - x^2]' \quad = \quad \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2x \quad = \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2x$$

Nu deze afgeleide gelijk aan nul stellen:

$$\begin{aligned} 0 = \tfrac{1}{2\sqrt{x}} - 2x \quad &\Rightarrow \quad 0 = 1 - 2x \cdot 2\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad 0 = 1 - 4x^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{4} = x^{\frac{3}{2}} \\ &\Rightarrow \quad x = \left(\tfrac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = 4^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

De y-coördinaat van de top is dan:

$$f\left(4^{-\frac{2}{3}}\right) = \left(4^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(4^{-\frac{2}{3}}\right)^2 = 4^{-\frac{1}{3}} - 4^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{4\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}} = 3 \cdot 4^{-\frac{4}{3}}$$

Dus f heeft een top in $\left(4^{-\frac{2}{3}}, 3 \cdot 4^{-\frac{4}{3}}\right)$.

c. De afstandsfunctie is $h(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} - \frac{3}{2}x^2$ en die kunnen we maximaliseren door de afgeleide $h'(x)$ te berekenen en dan gelijk aan nul stellen:

$$h'(x) \quad = \quad [f(x) - g(x)]' \quad = \quad f'(x) - g'(x) \quad = \quad \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2x - x \quad = \quad \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 3x$$

en nu gelijk aan nul stellen:

$$\begin{aligned} 0 = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 3x \quad &\Rightarrow \quad 0 = \tfrac{1}{2\sqrt{x}} - \tfrac{3x \cdot 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad 0 = \tfrac{1 - 6x^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad 0 = 1 - 6x^{\frac{3}{2}} \\ &\Rightarrow \quad x^{\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad x = \left(\tfrac{1}{6}\right)^{\frac{2}{3}} = 6^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

d. Hier moeten we een integraal berekenen:

$$\begin{aligned} \int_0^{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}} h(x)\,\mathrm{d}x \quad &= \quad \int_0^{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}} \left(\sqrt{x} - \frac{3}{2}x^2\right)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{2}\right]_0^{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \quad \frac{2^2}{3^2} - \frac{2}{3^2} - (0 - 0) \quad = \quad \frac{2}{3^2}(2-1) \quad = \quad \frac{2}{9} \end{aligned}$$

e. Om de gearceerde oppervlakte te bepalen, splitsen we het oppervlak op in twee delen. Het eerste deel is het stuk can 0 tot a en het tweede stuk can a tot 1. In onderdeel (a) hadden we bepaald dat $a = (\frac{2}{3})^{2/3}$. We bereken nu elk van de twee oppervlaktes appart. Het oppervlak van 0 tot a is gelijk aan

$$\begin{aligned} \int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2}x^3\right]_0^a = \tfrac{1}{2 \cdot 3}a^3 = \tfrac{1}{6}\left(\left(\tfrac{2}{3}\right)^{2/3}\right)^3 = \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}\cdot 3} \\ = \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{2}{3}\right)^2 = \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{4}{9} = \tfrac{4}{54} = \tfrac{2}{27}. \end{aligned}$$

De tweede oppervlakte is gelijk aan

$$\begin{aligned} \int_a^1 f(x)dx &= \int_a^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \int_a^1 (x^{1/2} - x^2)dx = \left[\tfrac{2}{3}x^{3/2} - \tfrac{1}{3}x^3\right]_a^1 \\ &= \left(\tfrac{2}{3}1^{3/2} - \tfrac{1}{3}1^3\right) - \left(\tfrac{2}{3}a^{3/2} - \tfrac{1}{3}a^3\right) \\ &= \left(\tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3}\right) - \left(\tfrac{2}{3}\left(\left(\tfrac{2}{3}\right)^{2/3}\right)^{3/2} - \tfrac{1}{3}\left(\left(\tfrac{2}{3}\right)^{2/3}\right)^3\right) = \tfrac{1}{3} - \left(\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}\cdot 3}\right) \\ &= \tfrac{1}{3} - \left(\tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^2\right) = \tfrac{1}{3} - \left(\tfrac{4}{9} - \tfrac{4}{27}\right) = \tfrac{1 \cdot 9}{3 \cdot 9} - \left(\tfrac{4 \cdot 3}{9 \cdot 3} - \tfrac{4}{27}\right) \\ &= \tfrac{9}{27} - \left(\tfrac{12}{27} - \tfrac{4}{27}\right) = \tfrac{9}{27} - \left(\tfrac{8}{27}\right) = \tfrac{1}{27} \end{aligned}$$

De gearceerde oppervlakte is gelijk aan de som van deze twee oppervlaktes en dus is de gearceerde oppervlakte $\frac{2}{27} + \frac{1}{27} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$.

f. De raaklijn aan f in het punt met x-coordinaat $\frac{1}{2}$ heeft vergelijking $l : y = ax + b$. a is gelijk aan de helling, en dus is a gelijk aan de afgeleide van f in het punt $\frac{1}{2}$. We bepalen de afgeleide van f

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} - 2x$$

En dus is

$$f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2})^{-1/2} - 2 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}2^{1/2} - 1 = \frac{\sqrt{2}-2}{2} = a$$

We hebben nu de waarde van a gevonden. Om b te bepalen gebruiken we dat de raaklijn door het punt $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$ gaat. We bereken $f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^{1/2} - (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2^{1/2}} - \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^{1/2}} - \frac{1}{4}$. We bepalen nu b uit de vergelijking $a \cdot \frac{1}{2} + b = f(\frac{1}{2})$. Door a in te vullen vinden we

$$\frac{\sqrt{2}-2}{2} \cdot \frac{1}{2} + b = \frac{1}{2^{1/2}} - \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{1}{2^{1/2}} - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}-2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2^{3/2}}{2^{1/2} \cdot 2^{3/2}} - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}-2}{2 \cdot 2}$$
$$= \frac{2^{3/2}}{4} - \frac{1}{4} - \frac{2^{1/2}-2}{4} = \frac{2^{3/2} - 1 - 2^{1/2} + 2}{4} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{2} - 1 + 2}{4} = \frac{\sqrt{2}+1}{4}$$

De vergelijking van de raaklijn is dus $l : y = \frac{\sqrt{2}-2}{2} \cdot x + \frac{\sqrt{2}+1}{4}$.

g. De richtingscoefficient van de raaklijn aan g in het punt x is gelijk aan de afgeleide g' in het punt x. Om te bepalen wanneer de richtingscoefficient gelijk is aan $1/e$ bepalen we dus eerst de afgeleide van g

$$g'(x) = 2 \cdot \tfrac{1}{2}x = x$$

We moeten dus oplossen $\frac{1}{e} = x$. We zien dus direct dat de richtingscoefficient van de raaklijn aan g gelijk is aan $1/e$ in het punt met x-coordinaat $\frac{1}{e}$. De bijbehorende y-coordinaat vinden we door $1/e$ in te vullen in $f(x)$.