

3 Oplossingen extra opgaven: exponenten en logaritmes

Opgave 3.1.

- a. Wanneer we de functies aan nul gelijk stellen, vinden we voor $f(x)$:

$$\log_2 x = 0, \quad \text{dus} \quad x = 2^0 = 1$$

en voor $g(x)$:

$$\begin{aligned} 1 + \log_{1/2}(2x + 1) = 0 &\Rightarrow \log_{1/2}(2x + 1) = -1 \\ &\Rightarrow 2x + 1 = (1/2)^{-1} = 1/(1/2) = 2 \Rightarrow 2x = 1, \end{aligned}$$

dus $x = 1/2$.

- b. In de y -as geldt $x = 0$, dus om het snijpunt van g met de y -as te vinden, berekenen we

$$g(0) = 1 + \log_{1/2}(2 \cdot 0 + 1) = 1 + \log_{1/2}(1) = 1 + 0 = 1.$$

De coördinaten van het snijpunt met de y -as zijn dus $(0, 1)$.

- c. Wanneer we $x = 0$ in f zouden invullen, moeten we $\log_2(0) = y$ uitrekenen. Ofwel, we zoeken naar een oplossing van $2^x = 0$. Een macht van 2 is echter altijd groter dan nul en dus heeft deze vergelijking geen oplossingen. Met andere woorden, f heeft geen snijpunt met de y -as.
- d. We stellen f en g aan elkaar gelijk:

$$\begin{aligned} \log_2 x = 1 + \log_{1/2}(2x + 1) &\Rightarrow \log_2 x - \log_{1/2}(2x + 1) = 1 \\ &\Rightarrow \log_2 x - \frac{\log_2(2x+1)}{\log_2(1/2)} = 1 \\ &\Rightarrow \log_2 x - \frac{\log_2(2x+1)}{-1} = 1. \end{aligned}$$

We herschrijven de linkerkant:

$$\begin{aligned} \log_2 x - \frac{\log_2(2x + 1)}{-1} &= \log_2 x + \log_2(2x + 1) = \log_2(x(2x + 1)) \\ &= \log_2(2x^2 + x). \end{aligned}$$

Hiermee wordt de vergelijking

$$\log_2(2x^2 + x) = 1 \Rightarrow 2x^2 + x = 2^1 \Rightarrow 2x^2 + x - 2 = 0.$$

Met de abc -formule vinden we $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$. De oplossing met het min-teken is negatief en het argument van het logaritme moet altijd positief zijn, dus vinden voor x -coördinaat van het snijpunt: $x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$. De coördinaten van het snijpunt zijn $\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{4}, \log_2\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{4}\right)\right)$.

- e. We zien in de grafiek dat $g(x) > f(x)$ wanneer $0 < x < \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$. Opmerking: we kunnen niet zeggen dat $g(x) > f(x)$ in het punt nul, omdat $f(0)$ geen betekenis heeft (zie onderdeel c).