4 Oplossingen extra opgaven: goniometrie

Opgave 4.1.

a. $\sin(3x) = \frac{1}{2}$ geeft

$$3x = \frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi \quad \text{of} \quad 3x = \pi-\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi = \frac{5\pi}{6}+k\cdot 2\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{18}+k\cdot\frac{2\pi}{3} \quad \text{of} \quad x = \frac{5\pi}{18}+k\cdot\frac{2\pi}{3},$$

met k geheel.

b. $\tan(2x-1) = 0$ betekent $\frac{\sin(2x-1)}{\cos(2x-1)} = 0$ en dus $\sin(2x-1) = 0$ (en $\cos(2x-1) \neq 0$). Nu schrijven we:

$$\begin{aligned} \sin(2x-1) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2x-1 = 0+k\cdot 2\pi \quad \text{of} \quad 2x-1 = \pi - 0 + k\cdot 2\pi \\ &\Rightarrow \quad 2x = 1+2k\cdot\pi \quad \text{of} \quad 2x = \pi+1+2k\cdot\pi \\ &\Rightarrow \quad x = \tfrac{1}{2}+k\cdot\pi \quad \text{of} \quad x = \tfrac{\pi}{2}+\tfrac{1}{2}+k\cdot\pi, \end{aligned}$$

met k geheel.

c. Gebruik de dubbele-hoek regel van de sinus om te herschrijven:

$$0 = \cos x + \sin 2x = \cos x + 2\sin x\cos x = \cos x(1+2\sin x)$$

Dus er moet gelden $\cos x = 0$ of $1 + 2\sin x = 0$. In het eerste geval is

$$x = \frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x = -\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi, \quad \text{dat is} \quad x = \frac{\pi}{2}+k\cdot\pi,$$

met k geheel. In het tweede geval hebben we:

$$\sin x = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7\pi}{6}+k\cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x = \pi-\frac{7\pi}{6}+k\cdot 2\pi = -\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi,$$

met k geheel.

d. We herschrijven:

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2} = \sin^3(x)+\sin(x)\cos^2(x) = \sin x(\sin^2 x+\cos^2 x) = \sin x$$

dat heeft als oplossingen:

$$x = \frac{5\pi}{4}+k\cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x = \pi-\frac{5\pi}{4}+k\cdot 2\pi = -\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi,$$

met k geheel.

Opgave 4.2. $\sin x = \cos x$ als $x = \frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi$ of $x = \frac{5\pi}{4}+k\cdot 2\pi$. Van deze liggen alleen $x = \frac{\pi}{4}$ en $x = \frac{5\pi}{4}$ tussen 0 en 2π.

Opgave* 4.3.

a. We gebruiken de stelling van Pythagoras op een van de driehoeken met twee zijden van lengte a en een zijde van lengte 1:

$$1^2 = a^2+a^2 \quad \Rightarrow \quad 1 = 2a^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

c. We gebruiken weer Pythagoras, op de helft van de gelijkzijdige driehoek:

$$h^2 = 1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$