5 Oplossing extra opgaven: afgeleiden

Opgave 5.1.

a. We berekenen de afgeleide van $f(x) = x^3 - 12x + 5$ en we vinden de nulpunten:

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2.$$

Nu de nulpunten van de afgeleide invullen in de functie zelf om de y-coördinaten te vinden:

$$f(-2) = -8 + 24 + 5 = 21 \quad \text{en} \quad f(2) = 8 - 24 + 5 = -11.$$

Dus de toppen zijn $(-2, 21)$ en $(2, -11)$.

b. Idem dito met $g(x) = \sqrt[3]{x} - x = x^{1/3} - x$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \tfrac{1}{3}x^{-2/3} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{3}x^{-2/3} = 1 \quad \Rightarrow \quad x^{-2/3} = 3 \quad \Rightarrow \quad \left(x^{-2/3}\right)^{-1} = 3^{-1} \\ &\Rightarrow \quad x^{2/3} = \tfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \left(x^{2/3}\right)^{3/2} = \left(\tfrac{1}{3}\right)^{3/2} \quad \Rightarrow \quad x = \left(\tfrac{1}{3}\right)^{3/2} = \tfrac{1}{\sqrt{3^3}} = \tfrac{1}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Het is natuurlijk niet toevallig dat we kiezen om de twee kanten van de vergelijking tot de macht $\frac{3}{2}$ te nemen, dat is namelijk het omgekeerde van $\frac{2}{3}$, dus $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$ en het verdwijnt in de macht van x. Dus bij een vergelijking $x^{\frac{a}{b}} = c$, is *in het algemeen* $x = c^{\frac{b}{a}}$.

Nu de y-coördinaat berekenen:

$$g\left(\tfrac{1}{\sqrt{3^3}}\right) = \sqrt[3]{\tfrac{1}{\sqrt{3^3}}} - \tfrac{1}{\sqrt{3^3}} = \left(\left(\tfrac{1}{3}\right)^{3/2}\right)^{1/3} - \left(\tfrac{1}{3}\right)^{3/2} = \left(\tfrac{1}{3}\right)^{1/2} - \left(\tfrac{1}{3}\right)^{3/2} = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(1 - \tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{2}{3\sqrt{3}}$$

Dus de top ligt in $\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$

c. Nog een keer met $h(x) = \frac{1}{x} + x^2 = x^{-1} + x^2$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= -x^{-2} + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{-1}{x^2} + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{-1}{x^2} + \tfrac{2x^3}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{-1+2x^3}{x^2} = 0 \\ &\Rightarrow \quad -1 + 2x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 = \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \tfrac{1}{\sqrt[3]{2}}. \end{aligned}$$

en:

$$h\left(\tfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \sqrt[3]{2} + \tfrac{1}{\sqrt[3]{2^2}} = \sqrt[3]{2} + \tfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

dus de top is in het punt $\left(\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right), \sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$

d. En als laatste $j(x) = \sin x - \frac{1}{2}x$ heeft afgeleide:

$$\cos x - \tfrac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x = \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \tfrac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x = -\tfrac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

en die hebben als y-coördinaten:

$$\sin(\tfrac{\pi}{3}) - \tfrac{\pi}{6} + k \cdot \pi = \tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{\pi}{6} + k \cdot \pi \quad \text{resp.} \quad \sin(-\tfrac{\pi}{3}) + \tfrac{\pi}{6} + k \cdot \pi = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{\pi}{6} + k \cdot \pi$$

Opgave 5.2. We hebben $f(x) = x$ en $g(x) = \sqrt{x}$:

a. De afstand r tussen f en g in $x = \frac{4}{9}$ is

$$g\left(\tfrac{4}{9}\right) - f\left(\tfrac{4}{9}\right) = \tfrac{2}{3} - \tfrac{4}{9} = \tfrac{2}{9}.$$

b. De afstand tussen f en g wordt gegeven door de functie $r(x) = g(x) - f(x) = \sqrt{x} - x$. De afgeleide gelijk aan nul stellen geeft:

$$\begin{aligned} r'(x) &= \tfrac{1}{2}x^{-1/2} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}x^{-1/2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x^{-1/2} = 2 \\ &\Rightarrow \quad \left(x^{-1/2}\right)^{-2} = 2^{-2} \quad \Rightarrow \quad x = \tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

Dus de afstand is maximaal voor $x = \frac{1}{4}$.