6 Oplossing extra opgaven: afgeleiden

Opgave 6.1.

a. $f'(x) = 1 \cdot \sin x + (x+1)\cos x = \sin x + (x+1)\cos x$

b. $g'(x) = (3x^2 - 5)(1 + \cos x) + (x^3 - 5x + 1) \cdot (-\sin x)$

c. $h'(x) = 2x \cos x - x^2 \sin x = x(2\cos x - x \sin x)$

d. $i'(x) = \sin x \cdot (-\sin x) + \cos x \cdot \cos x = -\sin^2 x + \cos^2 x = \cos(2x)$ (dubbele-hoek formule)

e. We gebruiken $j(x) = \sin x \cdot \sin x$ en de productregel. Dit geeft $j'(x) = \sin x \cos x + \sin x \cos x = 2 \sin x \cos x = \sin(2x)$

f. We hebben hier zowel de quotiëntregel als de productregel nodig. De productregel hebben we al in onderdeel c gebruikt om de afgeleide van de teller te vinden. Dit geeft

$$\begin{aligned} k'(x) &= \frac{(x+1)(2x\cos x - x^2 \sin x) - x^2 \cos x \cdot 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x^2 \cos x - x^3 \sin x + 2x \cos x - x^2 \sin x - x^2 \cos x}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 \cos x - x^3 \sin x - x^2 \sin x + 2x \cos x}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

g. We passen de quotiëntregel toe en het feit dat $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\ell'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Opgave 6.2.

a. We hebben $f'(x) = 3x^2 - 12$ en $f''(x) = 6x$. De vergelijking $3x^2 - 12 = 0$ geeft $x^2 = 4$, dus $x = \pm 2$. De y-waarden bij deze punten zijn $f(-2) = 21$ en $f(2) = -11$. Verder is $f''(2) = 12 > 0$, dus $(2, -11)$ is een minimum en $f''(-2) = -12 < 0$, dus $(-2, 21)$ is een maximum.

b. We hebben $g'(x) = 4x^3 - 4x$ en $g''(x) = 12x^2 - 4$. We lossen op $4x^3 - 4x = 0$:

$$4x(x^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ of } x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ of } x = \pm 1.$$

De functiewaarden bij deze x-waarden zijn $g(0) = 0$, $g(-1) = -1$ en $g(1) = -1$. Invullen in de tweede afgeleide: $g''(0) = -4$ (dus $(0,0)$ is een maximum), $g''(1) = g''(-1) = 8$ ($(\pm 1, -1)$ zijn minima).

c. We hebben $h'(x) = 4x^3 - 12x$ en $h''(x) = 12x^2 - 12$. Afgeleide gelijkstellen aan 0:

$$4x(x^2 - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ of } x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ of } x = \pm\sqrt{3}.$$

De y-waarden zijn $h(0) = 0$, $h(-\sqrt{3}) = -4$ en $h(\sqrt{3}) = -4$. We hebben $h''(0) = -12$ (dus $(0,0)$ is een maximum), $h''(\sqrt{3}) = h''(-\sqrt{3}) = 36 - 12 = 24$ (dus $(\pm\sqrt{3}, -4)$ zijn minima).

d. We hebben $j'(x) = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x$ en $j''(x) = -\sin x - x\cos x$. De vergelijking $j'(x) = 0$ geeft $x = 0$ of $\sin x = 0$, oftewel

$$x = 0 + k \cdot 2\pi = k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x = \pi - 0 + k \cdot 2\pi = \pi + k \cdot 2\pi.$$

Tussen 0 en 2π geeft dit als oplossingen 0, π en 2π. Er geldt $j(0) = 0$, $j(\pi) = -\pi$ en $j(2\pi) = 2\pi$. Invullen in de tweede afgeleide geeft $h''(0) = 0$ dus dit geeft geen informatie. Op het interval $[0, 2\pi]$ is er een maximum bij $x = 0$. We hebben verder $h''(\pi) = 0 - \pi \cdot -1 = \pi$ (minimum) en $h''(2\pi) = 0 - 2\pi \cdot 1 = -2\pi$ (maximum).

Opgave 6.3.

a. We vullen 0 in: $f(0) = 0$. Het snijpunt is dus $(0, 0)$.

b. We lossen op $x^3 + 5x^2 + 3x = 0$. Een x buiten haakjes halen geeft $x(x^2 + 5x + 3) = 0$, dus $x = 0$ of $x^2 + 5x + 3 = 0$. Voor deze vergelijking gebruiken we de *abc*-formule en vinden we

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 12}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Omdat we straks willen schetsen is het handig om te weten waar deze ongeveer liggen. We hebben $\sqrt{13} \approx 3\frac{1}{2}$, dus

$$\frac{-5 - \sqrt{13}}{2} \approx \frac{-8\frac{1}{2}}{2} = -4\tfrac{1}{4}, \qquad \frac{-5 + \sqrt{13}}{2} = \frac{-1\frac{1}{2}}{2} = -\frac{3}{4}.$$

(De rekenmachine gebruiken kan natuurlijk ook.)

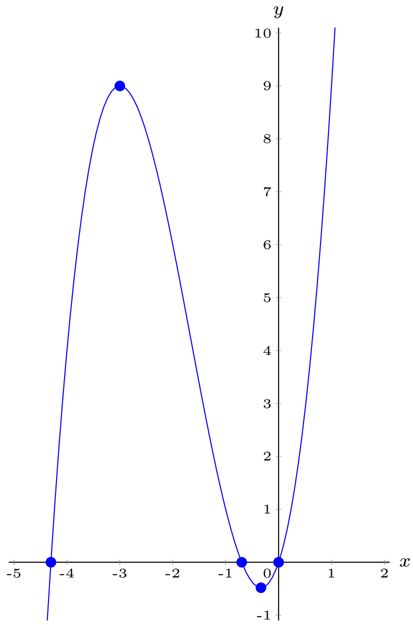
c. Er geldt $f'(x) = 3x^2 + 10x + 3$. Met de *abc*-formule vinden we

$$x_1 = \frac{-10 + \sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{-10 + \sqrt{64}}{6} = \frac{-10 + 8}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$
$$x_2 = \frac{-10 - 8}{6} = \frac{-18}{6} = -3.$$

De tweede afgeleide is $f''(x) = 6x + 10$, zodat $f''(-3) = -8$ en $f''(-1/3) = -2 + 10 = 8$. Dus in -3 is er een maximum en in $-1/3$ een minimum. Voor de schets bepalen we ook de y-coördinaten: $f(-3) = -27 + 45 - 9 = 9$ en

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27} + \frac{5}{9} - 1 = \frac{-1}{27} + \frac{15}{27} - \frac{27}{27} = -\frac{13}{27}.$$

d. Teken eerst de punten die je kent: de toppen en nulpunten. Omdat je ook weet wat voor toppen het zijn, geeft dit al een redelijk beeld van hoe de functie eruit ziet. Het enige wat misschien nog niet duidelijk is, is wat er gebeurt links van het linker nulpunt en rechts van het meest rechtste nulpunt. Om hier een idee van te krijgen zou je grote positieve en negatieve waarden (bijvoorbeeld 100 en -100) voor x in kunnen vullen. In dit geval zie je dan dat voor x groot de functie heel groot wordt en voor x groot en negatief de functiewaarden ook groot en negatief worden.



y
x
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-5
-4
-3
-2
-1
1
2