7 Oplossingen extra opgaven: kettingregel

Opgave 7.1.

a. We passen eerst de productregel toe op $f(x) = x \cdot e^{2x-1}$:

$$f'(x) \quad = \quad [x]' \cdot e^{2x-1} + x \cdot [e^{2x-1}]'.$$

Om $[e^{2x-1}]'$ te berekenen, gebruiken we de kettingregel met $u = 2x - 1$ en natuurlijk $u' = 2$:

$$[e^u]' \quad = \quad e^u \cdot u' \quad = \quad e^{2x-1} \cdot 2 \quad = \quad 2e^{2x-1}.$$

Dit vullen we weer in de formule voor f':

$$f'(x) \quad = \quad [x]' \cdot e^{2x-1} + x \cdot [e^{2x-1}]' \quad = \quad 1 \cdot e^{2x-1} + x \cdot 2e^{2x-1} \quad = \quad e^{2x-1} \cdot (1 + 2x).$$

b. We moeten $f'(x) = e^{2x-1} \cdot (1 + 2x) = 0$ oplossen. Een product is 0 als een van de twee factoren 0 is, dus:

$$e^{2x-1} = 0 \quad \text{of} \quad 1 + 2x = 0,$$

maar e^{2x-1} is nooit nul (want e is positief, dus ook al zijn machten). Dus er moet gelden

$$1 + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\tfrac{1}{2}.$$

De y-coördinaat van de top:

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) \quad = \quad -\tfrac{1}{2} \cdot e^{2\cdot(-\frac{1}{2})-1} \quad = \quad -\tfrac{1}{2} \cdot e^{-2} \quad = \quad -\tfrac{1}{2e^2}.$$

De top is dus $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2e}\right)$. Om de aard van deze top te bepalen, hebben we $f''(x)$ nodig:

$$\begin{aligned} f''(x) &= [e^{2x-1} \cdot (1 + 2x)]' \quad = \quad [e^{2x-1}]' \cdot (1 + 2x) + e^{2x-1} \cdot [1 + 2x]' \\ &= 2e^{2x-1} \cdot (1 + 2x) + e^{2x-1} \cdot 2 \quad = \quad 2e^{2x-1} \cdot (1 + 2x + 1) \\ &= 2e^{2x-1} \cdot (2 + 2x) \quad = \quad 4e^{2x-1} \cdot (1 + x). \end{aligned}$$

Nu berekenen we

$$f''\left(-\tfrac{1}{2}\right) \quad = \quad 4e^{\left(2\cdot -\frac{1}{2}\right)-1} \cdot \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) \quad = \quad 4e^{-1-1} \cdot \tfrac{1}{2} \quad = \quad 2e^{-2}.$$

Dit is positief, dus f heeft een minimum in $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2e}\right)$.

c. De raaklijn aan f in $x = 1$ heeft helling

$$f'(1) \quad = \quad e^{2\cdot 1-1} \cdot (1 + 2 \cdot 1) \quad = \quad 3e.$$

De raaklijn is dus van de vorm $y = 3e \cdot x + b$. De lijn gaat door het punt $(1, f(1))$, waarbij $f(1) = e$, dus we vinden:

$$e = 3e \cdot 1 + b \quad \Rightarrow \quad b = -2e$$

De raaklijn aan f in $x = 1$ heeft vergelijking $y = 3e \cdot x - 2e$.

Opgave 7.2.

a. Met de productregel voor afgeleiden vinden we:

$$\begin{aligned} g'(x) &= [x]' \cdot \ln(x) + x \cdot [\ln(x)]' \\ &= 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \tfrac{1}{x} \quad = \quad \ln(x) + \tfrac{x}{x} \quad = \quad \ln(x) + 1. \end{aligned}$$

b. De helling van g wordt gegeven door g'. Om het punt te vinden waarin g helling 2 heeft moeten we dus g' gelijk stellen aan 2. We krijgen

$$\ln(x) + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \ln(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad x = e.$$

Dit is de x-coördinaat van het punt waar g helling 2 heeft. Om de y-coördinaat te vinden, berekenen we:

$$g(e) \quad = \quad e \cdot \ln(e) \quad = \quad e \cdot 1 \quad = \quad e,$$

zodat g helling 2 heeft in het punt (e, e).

c. Voor de nulpunten schrijven we

$$g(x) = 0 = x\ln(x) \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{of} \quad \ln(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{of} \quad x = 1,$$

maar $x = 0$ kunnen we niet invullen in g omdat de logaritme van 0 niet bestaat, dus het enige nulpunt is $x = 1$. Voor de toppen lossen we $g'(x) = 0$ op:

$$g'(x) = \ln(x) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(x) = -1 \quad \Rightarrow \quad x = e^{-1} = \tfrac{1}{e}.$$

De y-coördinaat van de top is dan

$$g\left(\tfrac{1}{e}\right) \quad = \quad \tfrac{1}{e} \cdot \ln(\tfrac{1}{e}) \quad = \quad \tfrac{1}{e} \cdot -1 \quad = \quad -\tfrac{1}{e}.$$

Om de aard van de top te bepalen, hebben we de tweede afgeleide $g''(x)$ nodig:

$$g''(x) \quad = \quad [\ln(x) + 1]' \quad = \quad \tfrac{1}{x},$$

en hier vullen we $\frac{1}{e}$ in:

$$g''\left(\tfrac{1}{e}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e > 0,$$

dus g heeft een minimum in $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$.

d. Om te kijken wat er in de buurt van 0 gebeurt, kunnen we bijvoorbeeld 0.01 invullen in g. Met de rekenmachine vind je $g(0.01) \approx -0.05$, dus de functie gaat naar 0 toe als x naar 0 gaat. In het plaatje is ook de raaklijn in $x = e$ (zie onderdeel b) getekend.