8 Oplossing extra opgaven: integreren

Opgave 8.1.

a. De gearceerde oppervlakte ligt tussen de twee functies. We zouden kunnen raden dat de snijpunten $(0,0)$ en $(1,1)$ zijn, en dit klopt ook: bij beide functies komt er 0 uit als we 0 invullen en em 1 als we 1 invullen. Maar we gaan het netjes na:

$$\begin{aligned} x = x^2 \quad &\Rightarrow \quad x^2 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x-1) = 0 \\ &\Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{of} \quad x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{of} \quad x = 1. \end{aligned}$$

We berekenen:

$$\text{Opp} \quad = \quad \int_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}x \quad = \quad [\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3]_0^1 \quad = \quad \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} \quad = \quad \tfrac{1}{6}.$$

b. Voor de snijpunt met de x-as moeten we oplossen:

$$e^x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \ln(2)$$

De gearceerde oppervlakte wordt nu gegeven door:

$$\begin{aligned} \text{Opp} \quad &= \quad \int_0^{\ln(2)} -(e^x - 2)\,\mathrm{d}x + \int_{\ln(2)}^1 (e^x - 2)\,\mathrm{d}x = \quad [-e^x + 2x]_0^{\ln(2)} + [e^x - 2x]_{\ln(2)}^1 \\ &= \quad -2 + 2\ln(2) + 1 + e - 2 - 2 + 2\ln(2) \quad = \quad 4\ln(2) + e - 5 \end{aligned}$$

c. De snijpunten van de twee functies vinden we door de volgende vergelijking op te lossen:

$$\begin{aligned} 5 - 4x = \tfrac{1}{x} \quad &\Rightarrow \quad 5x - 4x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 - 5x + 1 = 0 \\ &\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{8} = \frac{5 \pm 3}{8} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{4} \quad \text{of} \quad x = 1 \end{aligned}$$

We berekenen dus:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{4}}^1 \left(5 - 4x - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \quad &= \quad [5x - 2x^2 - \ln(x)]_{\frac{1}{4}}^1 \quad = \quad 5 - 2 - \frac{5}{4} + \frac{1}{8} + \ln\left(\tfrac{1}{4}\right) \\ &= \quad \frac{15}{8} - \ln(4). \end{aligned}$$