9 Oplossingen extra opgaven: functieonderzoek

Opgave 9.1.

a. De functies x^4, 2 en $\sin x$ zijn overal goedgedefinieerd, dus het domein van de som van deze functies is ook $\mathbb{R}$.

b. De functie $\ln A$ is alleen gedefinieerd als $A > 0$. Dus in dit geval moet er gelden: $x - 3 > 0$, oftewel $x > 3$. Dus het domein van $y = \ln(x - 3)$ is $x > 3$.

c. We kunnen alleen de wortel trekken uit een positief getal en uit 0, dus een getal x zit in het domein van $y = \sqrt{x - 3}$ als $x - 3 \geq 0$, oftewel als $x \geq 3$.

d. De functie $x - 2$ is overal goed gedefinieerd, en zo is de functie $x^2 - 3x - 10$, maar deze laatste is nu in de noemer van de functie y, we moeten er dus voor zorgen dat $x^2 - 3x - 10$ niet 0 wordt, we kunnen namelijk niet door nul delen. We stellen dus $x^2 - 3x - 10 = 0$: we berekenen de discriminant $D = (-3)^2 - 4 \cdot -10 = 9 + 40 = 49$, dan met de ABC-formule vinden we dat
$$x_1 = \frac{3+7}{2} = 5 \quad \text{en} \quad x_2 = \frac{3-7}{2} = -2$$
Dus het domein van deze functie is $x \neq 5$ en $x \neq -2$

e. We kunnen de logaritme alleen van positieve getallen nemen, dus in dit geval ook we moeten gaan kijken naar wanneer $x^2 - 5x + 4 > 0$ is. We zien dat $x^2 - 5x + 4$ een dalparabool is, want de coëfficient bij x^2 is 1, groter dan 0. Dus $x^2 - 5x + 4 > 0$ links en rechts van de nulpunten. Deze laatste gaan we berekenen door de discriminant te vinden: $D = (-5)^2 - 4 \cdot 4 = 9$, en dan de ABC-formule toepassen:
$$x_1 = \frac{5+3}{2} = 4 \quad \text{en } x_2 = \frac{5-3}{2} = 1$$
Dus het domein van de functie $y = {}^6\log(x^2 - 5x + 4)$ is $x < 1$ en $x > 4$.

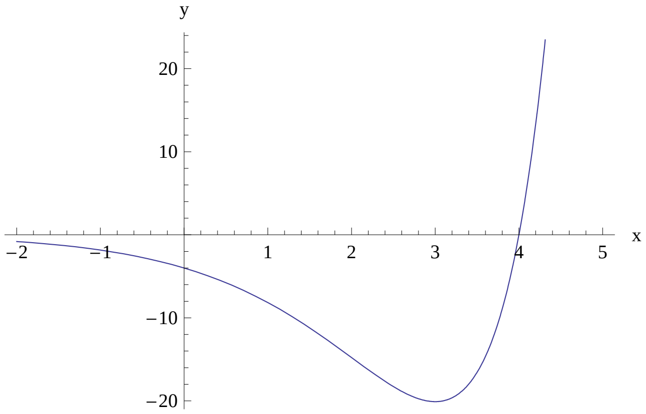
Opgave 9.2. We bekijken $f(x) = xe^x - 4e^x$.

a. Voor iedere waarde van x is dit goedgedefinieerd, dus het domein is $\mathbb{R}$.

b. We lossen op $xe^x - 4e^x = 0$. Dit kunnen we ontbinden tot $e^x(x - 4) = 0$ en dit is waar als $e^x = 0$ of $x - 4 = 0$. De functie e^x is nooit 0, dus het enige nulpunt is $x = 4$.

c. We berekenen de afgeleide met de productregel: $f'(x) = xe^x + 1 \cdot e^x - 4e^x = xe^x - 3e^x$. We stellen dit gelijk aan 0, waarbij we dit weer ontbinden tot $e^x(x - 3) = 0$, dus we hebben een top in $x = 3$. De y-coördinaat die hierbij hoort is $f(3) = 3e^3 - 4e^3 = -e^3$. Om te kijken of het een minimum of maximum is bepalen we de tweede afgeleide, weer met de productregel. We krijgen $f''(x) = xe^x + 1 \cdot e^x - 3e^x = xe^x - 2e^x$. We vinden $f''(3) = 3e^3 - 2e^3 = e^3 > 0$, dus dit is een minimum.

d. We hebben een top in $(3, -e^3) \approx (3, -20)$ en een nulpunt in $x = 4$. Verder vinden we dat voor kleine waarden van x de functie van onder naar 0 gaat en voor grote waarden van x wordt f ook groot.



e. We zien dat de functie alle waarden boven het minimum aanneemt. Dus het bereik bestaat uit alle y groter dan of gelijk aan de y-coördinaat van het minimum, dus $y \geq -e^3$.

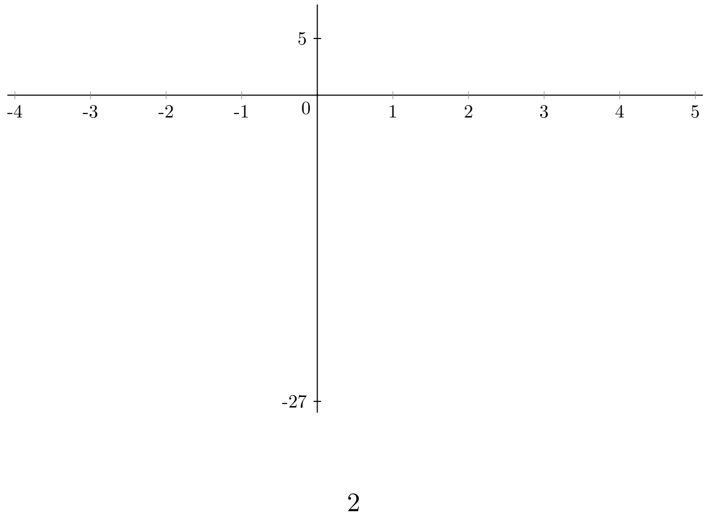
Opgave 9.3. Elk van de functies x^3, $-3x^2$ en $-9x$ is overal goedgedefinieerd, dus de functie g heeft als domein heel $\mathbb{R}$. We kunnen de functie $g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ herschrijven als $g(x) = x(x^2 - 3x - 9)$ en dus is $x = 0$ een nulpunt van g. Om het verder te herleiden gaan we de nulpunten vinden van de functie $x^2 - 3x - 9$. De discriminant van deze functie is $D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -9 = 9 + 36 = 45$ en zijn nulpunten zijn:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{45}}{2}$$

De nulpunten van de functie g zijn dus: 0, $\frac{3+\sqrt{45}}{2}$ en $\frac{3-\sqrt{45}}{2}$. Om de extrema van g te vinden, berekenen we de afgeleide en stellen we deze gelijk aan nul: $g'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0$. Dit is een kwadratische vergelijking, dus we berekenen de discriminant van de functie $3x^2 - 6x - 9$ en dan lossen we de vergelijking op met de ABC-formule. We krijgen $D = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -9 = 36 + 108 = 144$ en dit geeft

$$x_{3,4} = \frac{6 \pm \sqrt{144}}{2 \cdot 3} = \frac{6 \pm 12}{6}$$

Dus in $x_3 = \frac{6+12}{6} = 3$ en $x_4 = \frac{6-12}{6} = -1$ is de afgeleide van g gelijk aan nul. Om te onderzoeken of we te maken hebben met minima, maxima of buigpunten, berekenen we de tweede afgeleide van onze functie: $g''(x) = 6x - 6$. Hierin x_3 invullen geeft: $g''(x_3) = 6 \cdot 3 - 6 = 12 > 0$, dus g heeft een minimum in $x = 3$. De tweede afgeleide in het punt x_4 is: $g''(x_4) = 6 \cdot -1 - 6 = -12 < 0$, dus g heeft een maximum in $x = -1$. De y-coördinaten van de toppen zijn $g(-1) = 5$ en $g(3) = -27$. Hiermee kunnen de grafiek schetsen, waarbij we opmerken dat voor grote postieve waarden van x de functie g ook groot wordt en evenzo wordt g negatief en groot voor grote negatieve waarden van x:



We zien nu ook dat g alle mogelijke waarden aanneemt, dus het bereik is $\mathbb{R}$.

Opgave 9.4. We bekijken $h(x) = \frac{x^2-2x-4}{x-4}$. We hebben een breuk, dus de noemer mag niet 0 zijn. De noemer is alleen 0 voor $x = 4$, dus het domein bestaat uit alle $x \neq 4$. Voor de nulpunten lossen we $h(x) = 0$ op. Een breuk is alleen 0 als de teller 0 is, dus dit geeft $x^2 - 2x - 4 = 0$. De discriminant is $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -4 = 4 + 16 = 20$. De nulpunten zijn dus

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2}$$

We moeten nog controleren dat dit geen nulpunten zijn van de noemer $x = 4$. Hier is aan voldaan, want beide oplossingen zijn niet 4. Voor het vinden van de toppen bepalen we eerst de afgeleide met de quotiëntregel:

$$h'(x) = \frac{(x-4)(2x-2) - (x^2-2x-4) \cdot 1}{(x-4)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 8x + 8 - x^2 + 2x + 4}{(x-4)^2} = \frac{x^2 - 8x + 12}{(x-4)^2}.$$

We lossen nu weer op $h'(x) = 0$, en dit is alleen zo als de teller gelijk is aan 0, dus we krijgen $x^2 - 8x + 12 = 0$. Hierop passen we de ABC-formule toe:

$$x_{3,4} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2}.$$

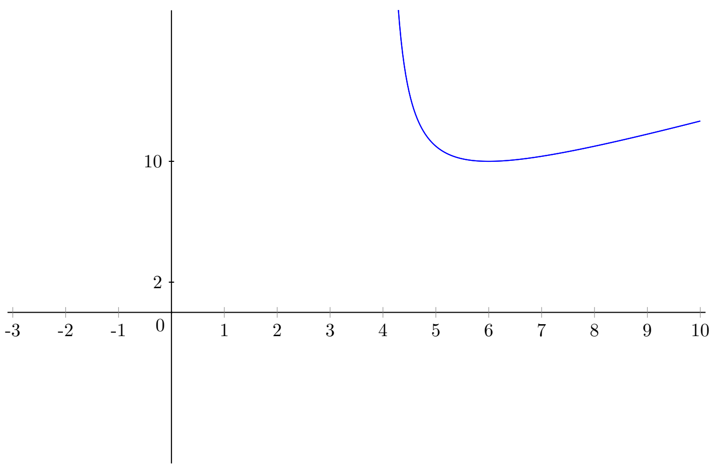
Dus in $x_3 = 6$ en $x_4 = 2$ is de afgeleide van h gelijk aan nul. We hebben de tweede afgeleide nodig om te bepalen of dit minima, maxima of buigpunten zijn. De tweede afgeleide is

$$h''(x) = \frac{(x-4)^2 \cdot (2x-8) - (x^2-8x+12) \cdot 2(x-4)}{((x-4)^2)^2} = \frac{(x-4) \cdot (2x-8) - (x^2-8x+12) \cdot 2}{(x-4)^3}$$

In de laatste stap hebben we de teller en de noemer beide door $(x-4)$ gedeeld (merk op dat $((x-4)^2)^2 = (x-4)^4$). We hebben nu

$$h''(x) = \frac{(2x^2 - 16x + 32) - (2x^2 - 16x + 24)}{(x-4)^3} = \frac{8}{(x-4)^3}$$

Hierin x_3 invullen geeft: $h''(x_3) = \frac{8}{6-4)^3} = \frac{8}{8} = 1 > 0$, dus h heeft een minimum in $x = 6$. De tweede afgeleide in het punt x_4 is: $h''(x_4) = \frac{8}{(2-4)^3} = \frac{8}{-8} = -1 < 0$, dus h heeft een maximum in $x = 2$. De y-coordinaten bij deze toppen zijn $h(6) = \frac{6^2-2\cdot6-4}{6-4} = \frac{20}{2} = 10$ en $h(2) = \frac{2^2-2\cdot2-4}{2-4} = \frac{-4}{-2} = 2$. Hiermee kunnen we een schets maken, waarbij we letten op de asymptoot in $x = 4$:

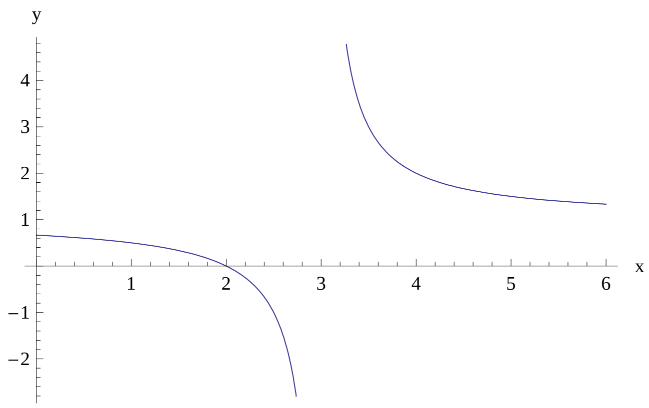


We zien nu dat h alle waarden op de y-as aanneemt behalve die tussen de twee toppen. Dus het bereik bestaat uit $y \geq 10$ en $y \leq 2$.

Opgave 9.5. a. De functies $x-2$ en $x-3$ zijn overal goedgedefinieerd, alleen de laatste functie staat in de noemer, dus deze mag niet nul worden, en omdat $x - 3 = 0$ als $x = 3$ is het domein van onze functie $x \neq 3$.

b. Als we steeds grotere positieve waarden van x in $i(x)$ vullen, komen we steeds dichterbij 1, maar we blijven altijd er net boven. Als we steeds grotere negatieve waarden van x in $i(x)$ vullen, komen we weer steeds dichterbij 1, alleen deze keer blijven we er net onder. Als x van links dichterbij 3 komt, dus bvb $x = 2.9; x = 2.99; x = 2.999$ dan daalt de functie naar min oneindig en voor x die van rechts dichterbij 3 komt, dus bvb $x = 3.1; x = 3.01; x = 3.001$ stijgt de functie naar oneindig.

c. De functie $i(x)$ heeft een verticale asymptoot in $x = 3$ en een horizontale in $y = 1$.



d. We zien dat $i(x)$ alle waarden aanneemt behalve de horizontale asymptoot. Het bereik van $i(x)$ is dus $y \neq 1$.