Uitwerkingen examen 8 augustus 2012

Opgave 1. 8 pt per onderdeel.

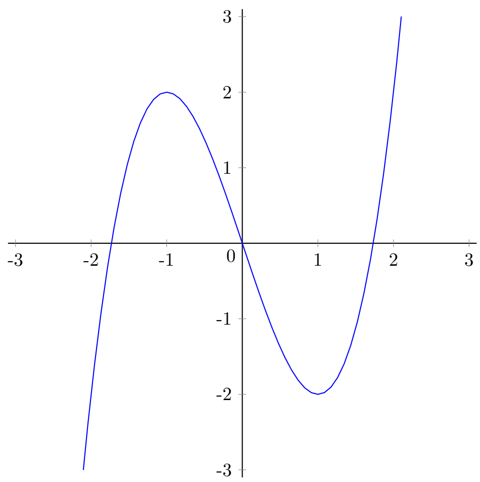
(a) Er geldt
$$f'(x) = -\tfrac{1}{2}\pi \sin(\tfrac{1}{2}\pi x).$$
Hiermee vinden we $f'(1) = -\frac{1}{2}\pi \cdot \sin\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2}\pi$. Verder is $f(1) = 0$. We lossen op
$$0 = -\frac{1}{2}\pi \cdot 1 + b,$$
zodat $b = \frac{1}{2}\pi$.

(b) We berekenen eerst
$$\int_0^1 \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{\pi}\sin(\tfrac{1}{2}\pi x) - x + \tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1 \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}.$$
De gevraagde oppervlakte is $\frac{4}{\pi} - 1$.

(c) We lossen op
$$1 - x = 1 - c\sqrt{x} \quad\Rightarrow\quad x = c\sqrt{x} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{x} = c \quad\Rightarrow\quad x = c^2.$$
Dit is gelijk aan $\frac{1}{2}$ voor $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Opgave 2. 8 pt per onderdeel: 1 pt domein, 2 pt nulpunten, 2 pt toppen, 2 pt schets, 1 pt bereik.

(a) Het domein is $\mathbb{R}$. Voor de nulpunten halen we x buiten haakjes: $x(x^2-3) = 0$ geeft $x = 0$ of $x = \pm\sqrt{3}$. Er geldt $f'(x) = 3x^2 - 3$. De vergelijking $f'(x) = 0$ geeft $x^2 = 1$, zodat $x = \pm 1$. De bijbehorende y-coördinaten zijn $f(1) = 1 - 3 = -2$ en $f(-1) = -1 + 3 = 2$. We hebben $f''(x) = 6x$, dus $(1, -2)$ is een minimum en $(-1, 2)$ een maximum. De grafiek is dan



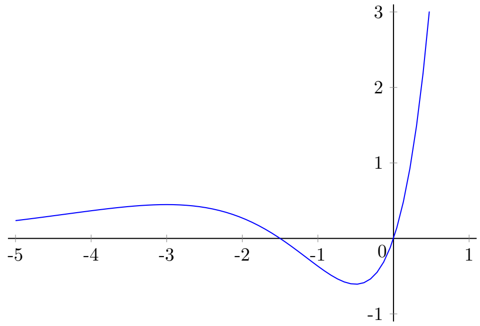
en het bereik is $\mathbb{R}$.

(b) Het domein is $\mathbb{R}$. Oplossen van $f(x) = 0$ geeft $3x + 2x^2 = 0$, dus $x = 0$ of $3 + 2x = 0$, wat $x = -\frac{3}{2}$ geeft. We hebben
$$f'(x) = (3 + 4x)e^x + (3x + 2x^2)e^x = (2x^2 + 7x + 3)e^x.$$

Gelijkstellen aan 0 geeft $2x^2 + 7x + 3 = 0$, zodat we met de ABC-formule vinden

$$x = \frac{-7 + \sqrt{49 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{4} = \frac{-7 + \sqrt{25}}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{en} \quad x = \frac{-7 - \sqrt{25}}{4} = -3.$$

We hebben $f''(x) = (2x^2 + 11x + 10)e^x$, zodat $f''(-3) = -5e^{-3} < 0$ en $f''(-1/2) = 5e^{-1/2} > 0$. We vinden een minimum in $(-1/2, -e^{-1/2})$ en een maximum in $(-3, 9e^{-3})$. De grafiek wordt



en het bereik is $y \geq -e^{-1/2}$.

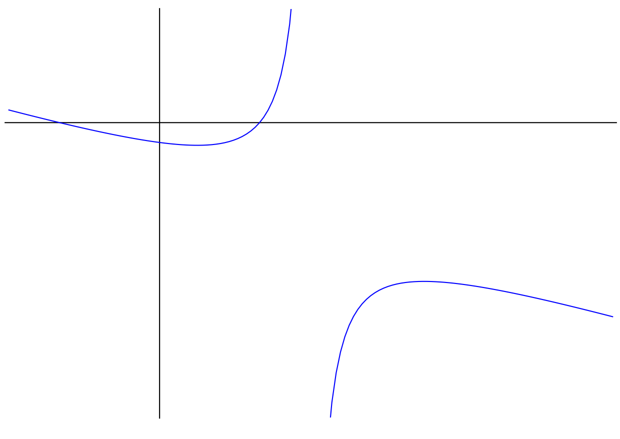
(c) Het domein is $x \neq 4$. De nulpunten zijn $x = \pm\sqrt{7}$. We hebben

$$f'(x) = \frac{(x-4)(-2x) - (7 - x^2)}{(x-4)^2} = \frac{-2x^2 + 8x - 7 + x^2}{(x-4)^2} = \frac{-x^2 + 8x - 7}{(x-4)^2}.$$

Gelijkstellen aan 0 geeft $x^2 - 8x + 7 = 0$, oftewel $(x-7)(x-1) = 0$. Dit geeft $x = 7$ en $x = 1$. De bijhorende y-coördinaten zijn $f(7) = -14$ en $f(1) = -2$. Verder geldt

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(x-4)^2(-2x+8) - (-x^2 + 8x - 7) \cdot 2(x-4)}{(x-4)^4} \\ &= \frac{(x-4)(-2x+8) - (-x^2 + 8x - 7) \cdot 2}{(x-4)^3} \\ &= \frac{-2x^2 + 16x - 32 + 2x^2 - 16x + 14}{(x-4)^3} = \frac{-18}{(x-4)^3}. \end{aligned}$$

We vinden $f''(7) < 0$, dus een maximum in $(7, -14)$ en $f''(1) > 0$, een minimum in $(1, -2)$.



Het bereik bestaat uit $y \geq -2$ en $y \leq -14$.

Opgave 3. 4 pt voor a t/m e, 5 pt voor f en g.

(a) We vinden $y = 0$ of $5 - y^2 = 0$, dus $y = \pm\sqrt{5}$.

(b) Merk op dat $f(y) = y(5 - y^2)$ voldoet aan $f(-1) = -4 < 0$, $f(1) = 4 > 0$, $f(-3) = 12 > 0$ en $f(3) = -12 < 0$. Dus de ongelijkheid geldt voor $y > \sqrt{5}$ en voor $-\sqrt{5} < y < 0$.

(c) Substitutie $y = e^x$ geeft $y = 0$ of $y = \pm\sqrt{5}$. De vergelijkingen $e^x = 0$ en $e^x = -\sqrt{5}$ hebben geen oplossingen. We vinden $x = \ln\sqrt{5}$.

(d) Dit geeft $x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi$ met k geheel.

(e) We gebruiken $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ om te vinden

$$2\sin x\cos x + \sin x = 0 \quad\Rightarrow\quad \sin x(2\cos x + 1) = 0,$$

dus $\sin x = 0$ of $\cos x = -\frac{1}{2}$. Het eerste geeft

$$x = k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x = \pi + k \cdot 2\pi$$

en $\cos x = -\frac{1}{2}$ geeft

$$x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad \text{of} \quad x = -\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi.$$

(f) Er geldt

$$[x^2 e^{\cos x}]' = 2xe^{\cos x} + x^2\left[e^{\cos x}\right]'.$$

We differentiëren $g(x) = e^{\cos x}$ met de kettingregel: $u = \cos x$, $g(u) = e^u$, $g'(u) = e^u$ en $u' = -\sin x$. Dit geeft $g'(x) = -e^{\cos x}\sin x$. Invullen:

$$[x^2 e^{\cos x}]' = 2xe^{\cos x} - x^2 e^{\cos x}\sin x.$$

(g) We hebben

$$\int_2^5 (x-1)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3/2}(x-1)^{3/2}\right]_2^5 = \frac{2}{3}\left(4^{3/2} - 1^{3/2}\right) = \frac{14}{3}.$$

Opgave 4. 8 pt per onderdeel.

(a) We schrijven $y = \ln x$ en lossen op

$$y^2 - 4y + 3 = 0 \quad\Rightarrow\quad (y-3)(y-1) = 0.$$

Dit geeft $y = 3$ of $y = 1$. Oplossen van $\ln x = 3$ geeft $x = e^3$, en $\ln x = 1$ geeft $x = e$.

(b) We hebben

$$f'(x) = \frac{2\ln x}{x} - \frac{4}{x} = \frac{2\ln x - 4}{x}.$$

Gelijkstellen aan 0 geeft $2\ln x - 4 = 0$, dus $\ln x = 2$. Dit geeft $x = e^2$, met $y = f(e^2) = 4 - 8 + 3 = -1$.