Uitwerkingen examen 31 juli 2013

Opgave 1. 5 pt per onderdeel.

(a) We lossen op

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot -1}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

(b) Er geldt $f(x) = x^3 - 2x$, dus $f'(x) = 3x^2 - 2$. We zien dat $f'(0) = -2$, dus we zoeken een lijn van de vorm $y = -2x + b$. De lijn gaat door $(0,0)$, dus $b = 0$: de lijn is $y = -2x$.

(c) We bepalen

$$\int_{-1}^{1} \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \big(x^3 - 2x - x^2 + x + 1\big)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \big(x^3 - x^2 - x + 1\big)\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{1} = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + 1 - \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} - 1\right) = 2 - \tfrac{2}{3} = \tfrac{4}{3}.$$

(d) We zoeken toppen van $r(x) = f(x) - g(x) = x^3 - x^2 - x + 1$. We lossen dus op

$$0 = r'(x) = 3x^2 - 2x - 1.$$

Dit geeft $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3 \cdot -1}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{2 \pm 4}{6}$. Dit geeft $x = 1$ of $x = -\frac{1}{3}$. We zien dat $r(1) = 0$, dus het gezochte maximum ligt in $x = -\frac{1}{3}$. De afstand is hier gelijk aan

$$r\left(-\tfrac{1}{3}\right) = -\tfrac{1}{27} - \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{3} + 1 = \tfrac{32}{27}.$$

(e) Een rechte lijn $y = ax + b$ die door $(-1, 0)$ gaat voldoet aan $0 = -a + b$, dus $a = b$. We zoeken dus lijnen van de vorm $y = ax + a = a(x+1)$. Er moet gelden

$$x^2 - x - 1 = (2x - 1)(x + 1) = 2x^2 + x - 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ of } x = -2.$$

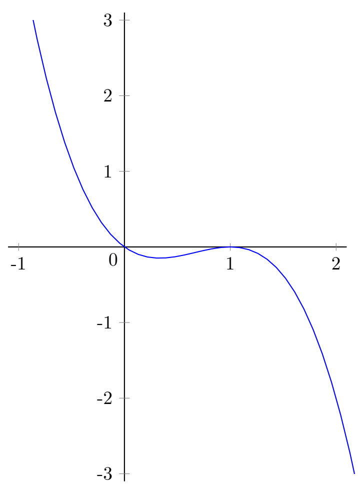
Dit geeft $y = -x - 1$ en $y = -5x - 5$.

Opgave 2. 6 pt per onderdeel: 1 pt domein, 1 pt nulpunten, 2 pt toppen, 1 pt schets, 1 pt bereik.

(a) Het domein is $\mathbb{R}$. Voor de nulpunten halen we een $-x$ buiten haakjes: $-x(x^2 - 2x + 1) = 0$. Dit geeft $x = 0$ of $0 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, dus $x = 1$. Er geldt $f'(x) = -3x^2 + 4x - 1$; dit gelijkstellen aan 0 geeft

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{-6} = \frac{4 \mp 3}{6},$$

dus $x = 1$ of $x = \frac{1}{3}$. Er geldt $f''(x) = -6x + 4$, met $f''(1) = -2 < 0$ en $f''(1/3) = 2 > 0$. We hebben dus een maximum in $(1, 0)$ en een minimum in $(1/3, -4/27)$. Dit geeft de schets



en het bereik is $\mathbb{R}$.

(b) Het domein is $\mathbb{R}$. Oplossen van $f(x) = 0$ geeft $x^2 - 2 = 0$ of $e^{-x} = 0$. Het laatste kan niet, en het eerste geeft $x = \pm\sqrt{2}$. Voor de toppen bepalen we de afgeleide

$$f'(x) = 2xe^{-x} + (x^2 - 2)(-e^{-x}) = (2x - x^2 + 2)e^{-x}.$$

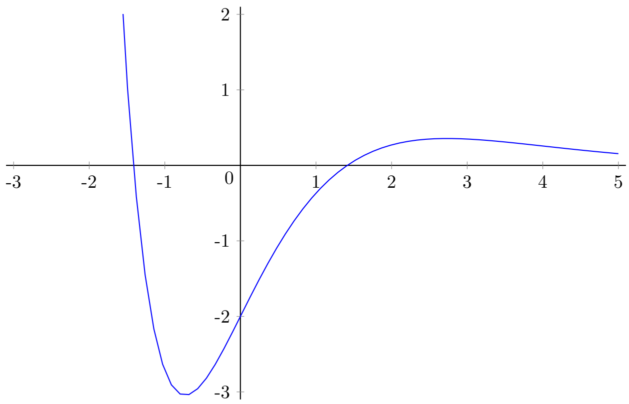
Gelijkstellen aan 0 geeft $-x^2 + 2x + 2 = 0$, oftewel

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot -1 \cdot 2}}{-2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{-2} = \frac{2 \mp \sqrt{12}}{2} = 1 \mp \sqrt{3}.$$

Er geldt

$$f''(x) = (2 - 2x)e^{-x} + (2x - x^2 + 2)(-e^{-x}).$$

Merk op dat de tweede term nul is als we $x = 1 \mp \sqrt{3}$ invullen. De eerste term is positief bij $1 - \sqrt{3}$ (dus een minimum) en negatief bij $1 + \sqrt{3}$ (maximum). We zien dat $g(1 - \sqrt{3}) \approx -3$ en $g(1 + \sqrt{3}) \approx 0.4$. We krijgen dan de volgende schets:



en het bereik is $y \geq g(1 - \sqrt{3})$.

Opgave 3. 5 pt per onderdeel.

(a) Dit geeft $x = \pm\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$.

(b) We gebruiken dat

$$^{\frac{1}{5}}\log(x) = \frac{^5\log(x)}{^5\log(1/5)} = \frac{^5\log(x)}{-1} = -^5\log(x).$$

Hiermee wordt de vergelijking

$$^5\log(x+1) - {}^5\log(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad {}^5\log\left(\frac{x+1}{x}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x+1}{x} = 5$$
$$\Rightarrow \quad x + 1 = 5x \quad \Rightarrow \quad 4x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1/4.$$

(c) We kwadrateren aan beide kanten en krijgen $16x^2 = 6x + 1$, oftewel $16x^2 - 6x - 1 = 0$. De ABC-formule geeft

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 16 \cdot 1}}{32} = \frac{6 \pm \sqrt{100}}{32} = \frac{6 \pm 10}{32} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \text{ of } x = -\frac{1}{8}.$$

Merk op dat $-1/8$ niet voldoet omdat de wortel nooit negatief is.

(d) We zien dat $x = 2$ een oplossing is. Delen door $x - 2$ geeft

$$x + 3 = -2x \quad \Rightarrow \quad 3x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1.$$

(e) We krijgen $(y - 2)(y - 1) = 0$, dus $y = 2$ of $y = 1$.

(f) Substitutie $y = e^{-x}$ brengt ons terug bij de vorige vraag, dus $y = 2$ of $y = 1$. Dit geeft $e^{-x} = 2$, dus $x = -\ln 2$ of $e^{-x} = 1$, dus $x = 0$.

(g) We lossen eerst op

$$\frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad 1 + e^{-x} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad e^{-x} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = -\ln\frac{1}{3} = \ln 3.$$

Merk nu op dat de functie $1/(1+e^{-x})$ stijgt als x toeneemt. De ongelijkheid geldt dus voor $x > \ln 3$.

Opgave 4. 5 pt per onderdeel.

(a) We passen de kettingregel toe met $u = 1 + \ln x$ en $f(u) = \sin u$. Dan is $u' = 1/x$ en $f'(u) = \cos u$.Dit geeft

$$\big[\sin\big(1 + \ln x\big)\big]' = (\cos u) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos(1 + \ln x)}{x}.$$

(b) De quotiëntregel geeft

$$\left[\frac{x-1}{x+1}\right]' = \frac{(x+1)\cdot 1 - (x-1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

Opgave 5. 5 pt per onderdeel.

(a) We hebben

$$\int_0^1 e^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \tfrac{1}{2}(e^2 - e^0) = \tfrac{1}{2}(e^2 - 1).$$

(b) Er geldt

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 (2-x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{1/2}(2-x)^{1/2}\right]_{-1}^1 = -2\big(3^{1/2} - 1^{1/2}\big) = 2(1 - \sqrt{3}).$$