Wiskunde logica

Werkcollege 1

Jolien Oomens

10 februari 2017

Opgave 2

Geef een voorbeeld van een verzameling en een relatie die

(a) reflexief maar niet transitief is;

(b) reflexief en transitief maar niet antisymmetrisch is;

(c) reflexief, transitief en symmetrisch maar niet totaal is.

Opgave 2

Geef een voorbeeld van een verzameling en een relatie die
(a) reflexief maar niet transitief is;
(b) reflexief en transitief maar niet antisymmetrisch is;
(c) reflexief, transitief en symmetrisch maar niet totaal is.

(a) Neem $X = \mathbb{R}$ en $Rxy \iff |x - y| < 1$.

Opgave 2

Geef een voorbeeld van een verzameling en een relatie die
(a) reflexief maar niet transitief is;
(b) reflexief en transitief maar niet antisymmetrisch is;
(c) reflexief, transitief en symmetrisch maar niet totaal is.

(a) Neem $X = \mathbb{R}$ en $Rxy \iff |x - y| < 1$.
Er geldt $0 \sim \frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2} \sim 1$, maar $0 \not\sim 1$.

Opgave 2

Geef een voorbeeld van een verzameling en een relatie die
(a) reflexief maar niet transitief is;
(b) reflexief en transitief maar niet antisymmetrisch is;
(c) reflexief, transitief en symmetrisch maar niet totaal is.

(a) Neem $X = \mathbb{R}$ en $Rxy \iff |x - y| < 1$.
Er geldt $0 \sim \frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2} \sim 1$, maar $0 \not\sim 1$.

(b) Neem $X = \mathbb{R}$ en $R = X \times X$.

Opgave 2

Geef een voorbeeld van een verzameling en een relatie die
(a) reflexief maar niet transitief is;
(b) reflexief en transitief maar niet antisymmetrisch is;
(c) reflexief, transitief en symmetrisch maar niet totaal is.

(a) Neem $X = \mathbb{R}$ en $Rxy \iff |x - y| < 1$.
Er geldt $0 \sim \frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2} \sim 1$, maar $0 \not\sim 1$.

(b) Neem $X = \mathbb{R}$ en $R = X \times X$.

(c) Neem $X = \mathbb{R}$ en $Rxy \iff \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$.

Opgave 2

Geef een voorbeeld van een verzameling en een relatie die
(a) reflexief maar niet transitief is;
(b) reflexief en transitief maar niet antisymmetrisch is;
(c) reflexief, transitief en symmetrisch maar niet totaal is.

(a) Neem $X = \mathbb{R}$ en $Rxy \iff |x - y| < 1$.
Er geldt $0 \sim \frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2} \sim 1$, maar $0 \not\sim 1$.

(b) Neem $X = \mathbb{R}$ en $R = X \times X$.

(c) Neem $X = \mathbb{R}$ en $Rxy \iff \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$.
We hebben Rxy dan en slechts dan als er een $n \in \mathbb{Z}$ is zodat $x, y \in [n, n+1)$,

Opgave 2

Geef een voorbeeld van een verzameling en een relatie die

(a) reflexief maar niet transitief is;

(b) reflexief en transitief maar niet antisymmetrisch is;

(c) reflexief, transitief en symmetrisch maar niet totaal is.

(a) Neem $X = \mathbb{R}$ en $Rxy \iff |x - y| < 1$.
Er geldt $0 \sim \frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2} \sim 1$, maar $0 \not\sim 1$.

(b) Neem $X = \mathbb{R}$ en $R = X \times X$.

(c) Neem $X = \mathbb{R}$ en $Rxy \iff \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$.
We hebben Rxy dan en slechts dan als er een $n \in \mathbb{Z}$ is zodat $x, y \in [n, n+1)$, dus bijvoorbeeld $0 \not\sim 1$.

Opgave 3

Zij $f: X \to X$ en bekijk $R_f \subseteq X^2$ gegeven door $R_f ab \iff f(a) = b$.
(a) Onder welke aannames is een relatie R te schrijven als R_f?
(b) Wat weet je over f als R_f reflexief is?

Opgave 3

Zij $f : X \to X$ en bekijk $R_f \subseteq X^2$ gegeven door $R_f ab \iff f(a) = b$.
(a) Onder welke aannames is een relatie R te schrijven als R_f?
(b) Wat weet je over f als R_f reflexief is?

(a) Een functie is *welgedefinieerd* als er voor elke x-waarde een unieke $f(x)$ bestaat.

Opgave 3

Zij $f : X \to X$ en bekijk $R_f \subseteq X^2$ gegeven door $R_f ab \iff f(a) = b$.
(a) Onder welke aannames is een relatie R te schrijven als R_f?
(b) Wat weet je over f als R_f reflexief is?

(a) Een functie is *welgedefinieerd* als er voor elke x-waarde een unieke $f(x)$ bestaat. Dit betekent precies dat

$$\forall x \exists y \, (Rxy \wedge \forall z \, (Rxz \to y = z)) \, .$$

Opgave 3

Zij $f : X \to X$ en bekijk $R_f \subseteq X^2$ gegeven door $R_f ab \iff f(a) = b$.
(a) Onder welke aannames is een relatie R te schrijven als R_f?
(b) Wat weet je over f als R_f reflexief is?

(a) Een functie is *welgedefinieerd* als er voor elke x-waarde een unieke $f(x)$ bestaat. Dit betekent precies dat

$$\forall x \exists y \left(Rxy \wedge \forall z \left(Rxz \to y = z \right) \right).$$

(b) Als $R_f aa$ dan hebben we $f(a) = a$.

Opgave 3

Zij $f : X \to X$ en bekijk $R_f \subseteq X^2$ gegeven door $R_f ab \iff f(a) = b$.
(a) Onder welke aannames is een relatie R te schrijven als R_f?
(b) Wat weet je over f als R_f reflexief is?

(a) Een functie is *welgedefinieerd* als er voor elke x-waarde een unieke $f(x)$ bestaat. Dit betekent precies dat

$$\forall x \exists y \, (Rxy \land \forall z \, (Rxz \to y = z)) \, .$$

(b) Als $R_f aa$ dan hebben we $f(a) = a$. Omdat dit voor alle $a \in X$ geldt zien we dat $f = \mathrm{id}_X$.

Opgave 4

Geef een voorbeeld van een poset (a) met een minimum; (b) zonder minimaal element; (c) met een minimaal element én zonder minimum.

Opgave 4

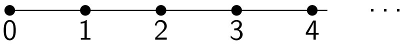
Geef een voorbeeld van een poset (a) met een minimum; (b) zonder minimaal element; (c) met een minimaal element én zonder minimum.

(a) De geordende verzameling $(\mathbb{N}, \leq)$ heeft 0 als minimum, want $0 \leq n$ voor alle n.

Opgave 4

Geef een voorbeeld van een poset (a) met een minimum; (b) zonder minimaal element; (c) met een minimaal element én zonder minimum.

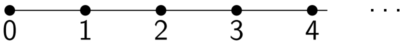
(a) De geordende verzameling $(\mathbb{N}, \leq)$ heeft 0 als minimum, want $0 \leq n$ voor alle n.



Opgave 4

Geef een voorbeeld van een poset (a) met een minimum; (b) zonder minimaal element; (c) met een minimaal element én zonder minimum.

(a) De geordende verzameling $(\mathbb{N}, \leq)$ heeft 0 als minimum, want $0 \leq n$ voor alle n.

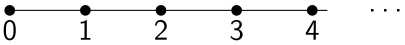


(b) De geordende verzameling $(\mathbb{Z}, \leq)$ heeft geen minimaal element,

Opgave 4

Geef een voorbeeld van een poset (a) met een minimum; (b) zonder minimaal element; (c) met een minimaal element én zonder minimum.

(a) De geordende verzameling $(\mathbb{N}, \leq)$ heeft 0 als minimum, want $0 \leq n$ voor alle n.

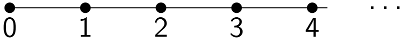


(b) De geordende verzameling $(\mathbb{Z}, \leq)$ heeft geen minimaal element, want voor alle n is er een $m < n$.

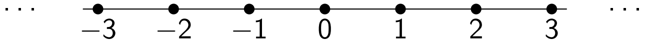
Opgave 4

Geef een voorbeeld van een poset (a) met een minimum; (b) zonder minimaal element; (c) met een minimaal element én zonder minimum.

(a) De geordende verzameling $(\mathbb{N}, \leq)$ heeft 0 als minimum, want $0 \leq n$ voor alle n.



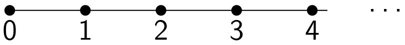
(b) De geordende verzameling $(\mathbb{Z}, \leq)$ heeft geen minimaal element, want voor alle n is er een $m < n$.



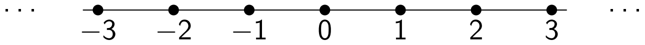
Opgave 4

Geef een voorbeeld van een poset (a) met een minimum; (b) zonder minimaal element; (c) met een minimaal element én zonder minimum.

(a) De geordende verzameling $(\mathbb{N}, \leq)$ heeft 0 als minimum, want $0 \leq n$ voor alle n.



(b) De geordende verzameling $(\mathbb{Z}, \leq)$ heeft geen minimaal element, want voor alle n is er een $m < n$.

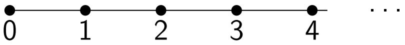


(c) Bekijk $\mathbb{N}$ met $Rxy \iff (x \leq y) \wedge \exists k\,(y - x = 2k)$.

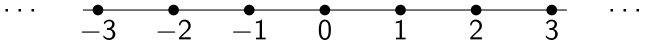
Opgave 4

Geef een voorbeeld van een poset (a) met een minimum; (b) zonder minimaal element; (c) met een minimaal element én zonder minimum.

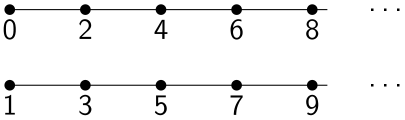
(a) De geordende verzameling $(\mathbb{N}, \leq)$ heeft 0 als minimum, want $0 \leq n$ voor alle n.



(b) De geordende verzameling $(\mathbb{Z}, \leq)$ heeft geen minimaal element, want voor alle n is er een $m < n$.



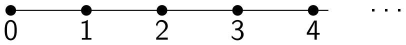
(c) Bekijk $\mathbb{N}$ met $Rxy \iff (x \leq y) \wedge \exists k\,(y - x = 2k)$.



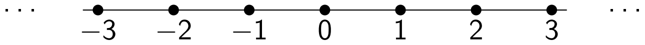
Opgave 4

Geef een voorbeeld van een poset (a) met een minimum; (b) zonder minimaal element; (c) met een minimaal element én zonder minimum.

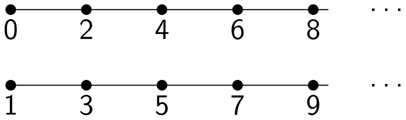
(a) De geordende verzameling $(\mathbb{N}, \leq)$ heeft 0 als minimum, want $0 \leq n$ voor alle n.



(b) De geordende verzameling $(\mathbb{Z}, \leq)$ heeft geen minimaal element, want voor alle n is er een $m < n$.



(c) Bekijk $\mathbb{N}$ met $Rxy \iff (x \leq y) \wedge \exists k\,(y - x = 2k)$.



De minimale elementen zijn 0 en 1, maar er is geen minimum.

Opgave 5

We noemen $f\colon (X,R) \to (X',R')$ een homomorfisme als Rab impliceert dat ook $R'f(a)f(b)$. Neem aan dat f surjectief is. (a) Als R reflexief is, is R' dat dan ook? (b) Herhaal voor transitiviteit (c) Herhaal voor irreflexiviteit.

Opgave 5

We noemen $f\colon (X,R) \to (X',R')$ een homomorfisme als Rab impliceert dat ook $R'f(a)f(b)$. Neem aan dat f surjectief is. (a) Als R reflexief is, is R' dat dan ook? (b) Herhaal voor transitiviteit (c) Herhaal voor irreflexiviteit.

(a) Neem $x' \in X'$.

Opgave 5

We noemen $f: (X, R) \to (X', R')$ een homomorfisme als Rab impliceert dat ook $R'f(a)f(b)$. Neem aan dat f surjectief is. (a) Als R reflexief is, is R' dat dan ook? (b) Herhaal voor transitiviteit (c) Herhaal voor irreflexiviteit.

(a) Neem $x' \in X'$. Vanwege de surjectiviteit van f bestaat er een x zodat $f(x) = x'$.

Opgave 5

We noemen $f: (X, R) \to (X', R')$ een homomorfisme als Rab impliceert dat ook $R'f(a)f(b)$. Neem aan dat f surjectief is. (a) Als R reflexief is, is R' dat dan ook? (b) Herhaal voor transitiviteit (c) Herhaal voor irreflexiviteit.

(a) Neem $x' \in X'$. Vanwege de surjectiviteit van f bestaat er een x zodat $f(x) = x'$. Omdat R reflexief is geldt Rxx,

Opgave 5

We noemen $f\colon (X,R) \to (X',R')$ een homomorfisme als Rab impliceert dat ook $R'f(a)f(b)$. Neem aan dat f surjectief is. (a) Als R reflexief is, is R' dat dan ook? (b) Herhaal voor transitiviteit (c) Herhaal voor irreflexiviteit.

(a) Neem $x' \in X'$. Vanwege de surjectiviteit van f bestaat er een x zodat $f(x) = x'$. Omdat R reflexief is geldt Rxx, dus er geldt ook $R'f(x)f(x)$,

Opgave 5

We noemen $f\colon (X,R) \to (X',R')$ een homomorfisme als Rab impliceert dat ook $R'f(a)f(b)$. Neem aan dat f surjectief is. (a) Als R reflexief is, is R' dat dan ook? (b) Herhaal voor transitiviteit (c) Herhaal voor irreflexiviteit.

(a) Neem $x' \in X'$. Vanwege de surjectiviteit van f bestaat er een x zodat $f(x) = x'$. Omdat R reflexief is geldt Rxx, dus er geldt ook $R'f(x)f(x)$, oftewel $R'x'x'$.

Opgave 5

We noemen $f\colon (X, R) \to (X', R')$ een homomorfisme als Rab impliceert dat ook $R'f(a)f(b)$. Neem aan dat f surjectief is. (a) Als R reflexief is, is R' dat dan ook? (b) Herhaal voor transitiviteit (c) Herhaal voor irreflexiviteit.

(a) Neem $x' \in X'$. Vanwege de surjectiviteit van f bestaat er een x zodat $f(x) = x'$. Omdat R reflexief is geldt Rxx, dus er geldt ook $R'f(x)f(x)$, oftewel $R'x'x'$. Dit bewijst dat R' reflexief is.

Opgave 5

We noemen $f\colon (X,R) \to (X',R')$ een homomorfisme als Rab impliceert dat ook $R'f(a)f(b)$. Neem aan dat f surjectief is. (a) Als R reflexief is, is R' dat dan ook? (b) Herhaal voor transitiviteit (c) Herhaal voor irreflexiviteit.

(a) Neem $x' \in X'$. Vanwege de surjectiviteit van f bestaat er een x zodat $f(x) = x'$. Omdat R reflexief is geldt Rxx, dus er geldt ook $R'f(x)f(x)$, oftewel $R'x'x'$. Dit bewijst dat R' reflexief is.

(b) Stel dat $x', y', z' \in X'$ zodat $R'x'y'$ en $R'y'z'$.

Opgave 5

We noemen $f\colon (X, R) \to (X', R')$ een homomorfisme als Rab impliceert dat ook $R'f(a)f(b)$. Neem aan dat f surjectief is. (a) Als R reflexief is, is R' dat dan ook? (b) Herhaal voor transitiviteit (c) Herhaal voor irreflexiviteit.

(a) Neem $x' \in X'$. Vanwege de surjectiviteit van f bestaat er een x zodat $f(x) = x'$. Omdat R reflexief is geldt Rxx, dus er geldt ook $R'f(x)f(x)$, oftewel $R'x'x'$. Dit bewijst dat R' reflexief is.

(b) Stel dat $x', y', z' \in X'$ zodat $R'x'y'$ en $R'y'z'$. Er zijn x, y, z zodat $f(x) = x'$, $f(y) = y'$ en $f(z) = z'$.

Opgave 5

We noemen $f\colon (X,R) \to (X',R')$ een homomorfisme als Rab impliceert dat ook $R'f(a)f(b)$. Neem aan dat f surjectief is. (a) Als R reflexief is, is R' dat dan ook? (b) Herhaal voor transitiviteit (c) Herhaal voor irreflexiviteit.

(a) Neem $x' \in X'$. Vanwege de surjectiviteit van f bestaat er een x zodat $f(x) = x'$. Omdat R reflexief is geldt Rxx, dus er geldt ook $R'f(x)f(x)$, oftewel $R'x'x'$. Dit bewijst dat R' reflexief is.

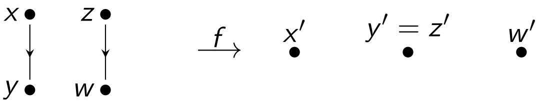
(b) Stel dat $x', y', z' \in X'$ zodat $R'x'y'$ en $R'y'z'$. Er zijn x, y, z zodat $f(x) = x'$, $f(y) = y'$ en $f(z) = z'$. En nu?

Opgave 5

We noemen $f : (X, R) \to (X', R')$ een homomorfisme als Rab impliceert dat ook $R'f(a)f(b)$. Neem aan dat f surjectief is. (a) Als R reflexief is, is R' dat dan ook? (b) Herhaal voor transitiviteit (c) Herhaal voor irreflexiviteit.

(a) Neem $x' \in X'$. Vanwege de surjectiviteit van f bestaat er een x zodat $f(x) = x'$. Omdat R reflexief is geldt Rxx, dus er geldt ook $R'f(x)f(x)$, oftewel $R'x'x'$. Dit bewijst dat R' reflexief is.

(b) Stel dat $x', y', z' \in X'$ zodat $R'x'y'$ en $R'y'z'$. Er zijn x, y, z zodat $f(x) = x'$, $f(y) = y'$ en $f(z) = z'$. En nu?

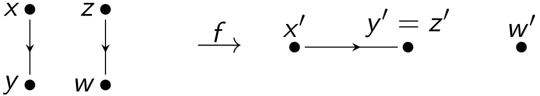


Opgave 5

We noemen $f : (X, R) \to (X', R')$ een homomorfisme als Rab impliceert dat ook $R'f(a)f(b)$. Neem aan dat f surjectief is. (a) Als R reflexief is, is R' dat dan ook? (b) Herhaal voor transitiviteit (c) Herhaal voor irreflexiviteit.

(a) Neem $x' \in X'$. Vanwege de surjectiviteit van f bestaat er een x zodat $f(x) = x'$. Omdat R reflexief is geldt Rxx, dus er geldt ook $R'f(x)f(x)$, oftewel $R'x'x'$. Dit bewijst dat R' reflexief is.

(b) Stel dat $x', y', z' \in X'$ zodat $R'x'y'$ en $R'y'z'$. Er zijn x, y, z zodat $f(x) = x'$, $f(y) = y'$ en $f(z) = z'$. En nu?

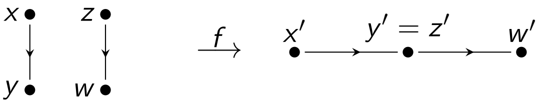


Opgave 5

We noemen $f\colon (X,R) \to (X',R')$ een homomorfisme als Rab impliceert dat ook $R'f(a)f(b)$. Neem aan dat f surjectief is. (a) Als R reflexief is, is R' dat dan ook? (b) Herhaal voor transitiviteit (c) Herhaal voor irreflexiviteit.

(a) Neem $x' \in X'$. Vanwege de surjectiviteit van f bestaat er een x zodat $f(x) = x'$. Omdat R reflexief is geldt Rxx, dus er geldt ook $R'f(x)f(x)$, oftewel $R'x'x'$. Dit bewijst dat R' reflexief is.

(b) Stel dat $x', y', z' \in X'$ zodat $R'x'y'$ en $R'y'z'$. Er zijn x, y, z zodat $f(x) = x'$, $f(y) = y'$ en $f(z) = z'$. En nu?

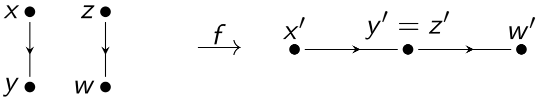


Opgave 5

We noemen $f\colon (X,R) \to (X',R')$ een homomorfisme als Rab impliceert dat ook $R'f(a)f(b)$. Neem aan dat f surjectief is. (a) Als R reflexief is, is R' dat dan ook? (b) Herhaal voor transitiviteit (c) Herhaal voor irreflexiviteit.

(a) Neem $x' \in X'$. Vanwege de surjectiviteit van f bestaat er een x zodat $f(x) = x'$. Omdat R reflexief is geldt Rxx, dus er geldt ook $R'f(x)f(x)$, oftewel $R'x'x'$. Dit bewijst dat R' reflexief is.

(b) Stel dat $x', y', z' \in X'$ zodat $R'x'y'$ en $R'y'z'$. Er zijn x, y, z zodat $f(x) = x'$, $f(y) = y'$ en $f(z) = z'$. En nu?



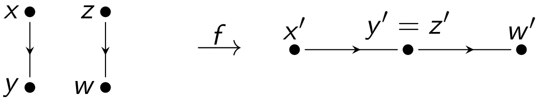
Figuur: Een tegenvoorbeeld: (X', R') is niet transitief.

Opgave 5

We noemen $f\colon (X,R) \to (X',R')$ een homomorfisme als Rab impliceert dat ook $R'f(a)f(b)$. Neem aan dat f surjectief is. (a) Als R reflexief is, is R' dat dan ook? (b) Herhaal voor transitiviteit (c) Herhaal voor irreflexiviteit.

(a) Neem $x' \in X'$. Vanwege de surjectiviteit van f bestaat er een x zodat $f(x) = x'$. Omdat R reflexief is geldt Rxx, dus er geldt ook $R'f(x)f(x)$, oftewel $R'x'x'$. Dit bewijst dat R' reflexief is.

(b) Stel dat $x', y', z' \in X'$ zodat $R'x'y'$ en $R'y'z'$. Er zijn x, y, z zodat $f(x) = x'$, $f(y) = y'$ en $f(z) = z'$. En nu?



Figuur: Een tegenvoorbeeld: (X', R') is niet transitief.

De claim is dus onwaar.

Opgave 5

We noemen $f: (X, R) \to (X', R')$ een homomorfisme als Rab impliceert dat ook $R'f(a)f(b)$. Neem aan dat f surjectief is. (a) Als R reflexief is, is R' dat dan ook? (b) Herhaal voor transitiviteit (c) Herhaal voor irreflexiviteit.

Opgave 5

We noemen $f\colon (X,R) \to (X',R')$ een homomorfisme als Rab impliceert dat ook $R'f(a)f(b)$. Neem aan dat f surjectief is. (a) Als R reflexief is, is R' dat dan ook? (b) Herhaal voor transitiviteit (c) Herhaal voor irreflexiviteit.

(c) Stel dat $x' \in X'$ en stel dat $R'x'x'$.

Opgave 5

We noemen $f\colon (X,R) \to (X',R')$ een homomorfisme als Rab impliceert dat ook $R'f(a)f(b)$. Neem aan dat f surjectief is. (a) Als R reflexief is, is R' dat dan ook? (b) Herhaal voor transitiviteit (c) Herhaal voor irreflexiviteit.

(c) Stel dat $x' \in X'$ en stel dat $R'x'x'$. Er is een $x \in X$ met $f(x) = x'$.

Opgave 5

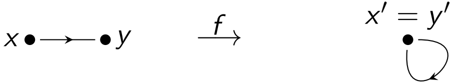
We noemen $f\colon (X, R) \to (X', R')$ een homomorfisme als Rab impliceert dat ook $R'f(a)f(b)$. Neem aan dat f surjectief is. (a) Als R reflexief is, is R' dat dan ook? (b) Herhaal voor transitiviteit (c) Herhaal voor irreflexiviteit.

(c) Stel dat $x' \in X'$ en stel dat $R'x'x'$. Er is een $x \in X$ met $f(x) = x'$. En nu?

Opgave 5

We noemen $f\colon (X,R) \to (X',R')$ een homomorfisme als Rab impliceert dat ook $R'f(a)f(b)$. Neem aan dat f surjectief is. (a) Als R reflexief is, is R' dat dan ook? (b) Herhaal voor transitiviteit (c) Herhaal voor irreflexiviteit.

(c) Stel dat $x' \in X'$ en stel dat $R'x'x'$. Er is een $x \in X$ met $f(x) = x'$. En nu?



Opgave 5

We noemen $f\colon (X,R) \to (X',R')$ een homomorfisme als Rab impliceert dat ook $R'f(a)f(b)$. Neem aan dat f surjectief is. (a) Als R reflexief is, is R' dat dan ook? (b) Herhaal voor transitiviteit (c) Herhaal voor irreflexiviteit.

(c) Stel dat $x' \in X'$ en stel dat $R'x'x'$. Er is een $x \in X$ met $f(x) = x'$. En nu?

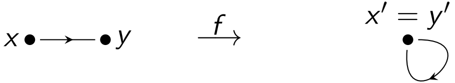
$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] & y & {} \arrow[r, "f"] & {} & x' = y' \arrow[loop below] \end{tikzcd}$$

Figuur: Een tegenvoorbeeld: (X', R') is niet irreflexief.

Opgave 5

We noemen $f\colon (X,R) \to (X',R')$ een homomorfisme als Rab impliceert dat ook $R'f(a)f(b)$. Neem aan dat f surjectief is. (a) Als R reflexief is, is R' dat dan ook? (b) Herhaal voor transitiviteit (c) Herhaal voor irreflexiviteit.

(c) Stel dat $x' \in X'$ en stel dat $R'x'x'$. Er is een $x \in X$ met $f(x) = x'$. En nu?



Figuur: Een tegenvoorbeeld: (X',R') is niet irreflexief.

De claim is dus onjuist.