Wiskunde logica

Werkcollege 10

Jolien Oomens

21 april 2017

Opgave 5(a)

Bewijs dat $\mathfrak{K}$ elementair is dan en slechts dan als er een eindig systeem van axioma's bestaat.

De implicatie "$\Longrightarrow$" is triviaal.
"$\Longleftarrow$": Stel dat $\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}(\Phi)$ met $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Definieer nu

$$\psi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n.$$

Dan geldt $\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}(\{\psi\})$, dus $\mathfrak{K}$ is elementair.

Opgave 5(b)

Als $\mathfrak{K}$ elementair is en $\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}(\Phi)$ dan is er een eindige $\varphi_0 \subseteq \Phi$ zodat $\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}(\Phi_0)$.

We hebben $\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}(\{\varphi\})$ voor een zekere formule φ. De verzameling $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ is onvervulbaar, dus er is een eindige deelverzameling $\Phi_0 \cup \{\neg\varphi\}$ die onvervulbaar is.

Het is zeker waar dat $\mathrm{Mod}(\Phi) \subseteq \mathrm{Mod}(\Phi_0)$.
Zij $M \in \mathrm{Mod}\,\Phi_0$. Omdat $\Phi_0 \cup \{\neg\varphi\}$ inconsistent is volgt dat $M \not\models \neg\varphi$ dus $M \models \varphi$. Hieruit volgt dat M een element is van $\mathrm{Mod}(\{\varphi\}) = \mathrm{Mod}(\Phi)$.

Opgave 6(a)

Zij $\mathfrak{K}_1 \subseteq \mathfrak{K}$ en $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K} \setminus \mathfrak{K}_1$. Stel dat $\mathfrak{K}$ elementair is en $\mathfrak{K}_1$ Δ-elementair is. Bewijs dat $\mathfrak{K}_1$ elementair is dan en slechts dan als $\mathfrak{K}_2$ Δ-elementair is.

"$\Longrightarrow$": Stel dat $\mathfrak{K}_1 = \mathrm{Mod}(\{\varphi\})$. Schrijf $\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}(\{\psi\})$. De formule $\psi \wedge \neg\varphi$ beschrijft nu precies $\mathfrak{K}_2$, dus $\mathfrak{K}_2$ is zelfs elementair.
"$\Longleftarrow$": Stel dat $\mathfrak{K}_2 = \mathrm{Mod}(\Psi)$. Schrijf $\mathfrak{K}_1 = \mathrm{Mod}(\Phi)$. De verzameling $\Phi \cup \Psi$ is onvervulbaar dus er is een eindige deelverzameling $\Phi_0 \cup \Psi_0$ die onvervulbaar is. Er geldt nu $\mathfrak{K}_1 = \mathrm{Mod}(\Phi_0 \cup \{\psi\})$. Deze verzameling is *eindig*, dus $\mathfrak{K}_1$ is elementair.

(Bewijs: stel dat $M \models \Phi_0$ en $M \models \psi$. Dan kan M geen model zijn van Ψ_0, dus $M \notin \mathrm{Mod}(\Psi) = \mathfrak{K}_2$. Omdat M wel een model is van ψ geldt $M \in \mathfrak{K} \setminus \mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}_1$.)

Opgave 6(b)

Bewijs dat $\mathfrak{K}_2$ Δ-elementair is dan en slechts dan als $\mathfrak{K}_2$ elementair is.

"$\Longleftarrow$" is triviaal.
"$\Longrightarrow$": Als $\mathfrak{K}_2$ Δ-elementair is dan hebben we $\mathfrak{K}_1 = \mathrm{Mod}(\{\varphi\})$ volgens onderdeel (a). Schrijf $\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}(\{\psi\})$. Nu geldt $\mathfrak{K}_2 = \mathrm{Mod}(\{\psi \wedge \neg\varphi\})$, dus $\mathfrak{K}_2$ is elementair.

Opgave 7

Geef een formule die voor elke n een model heeft met $2n$ punten (en geen oneven modellen).

Idee: we nemen twee unaire relatiesymbolen R en B zodat voor elk punt óf Rx geldt óf Bx. Als er dan een permutatie f bestaat die de kleuren omdraait dan waren blijkbaar evenveel punten rood gekleurd als blauw.
Formeel: Neem $S := \{R, B, f\}$. We willen dat voldaan wordt aan

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x(Rx \vee Bx) \\
\varphi_2 &= \neg\exists x(Rx \wedge Bx) \\
\varphi_3 &= \forall x\,((Bx \to R(fx)) \wedge (Rx \to B(fx))) \\
\varphi_4 &= \forall x \forall y(fx \equiv fy \to x \equiv y)
\end{aligned}$$

dus we nemen de formule $\varphi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_4$.