Wiskunde logica

Werkcollege 13

Jolien Oomens

22 mei 2017

Opgave 1(a)

Stel dat X een eindige verzameling is. Bewijs dat elke ultrafilter van $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ van de vorm $F_x = \{U \subseteq X : x \in U\}$ is.

Opgave 1(a)

Stel dat X een eindige verzameling is. Bewijs dat elke ultrafilter van $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ van de vorm $F_x = \{U \subseteq X : x \in U\}$ is.

Schrijf $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ en $A_i = \{x_i\}$.

Opgave 1(a)

Stel dat X een eindige verzameling is. Bewijs dat elke ultrafilter van $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ van de vorm $F_x = \{U \subseteq X : x \in U\}$ is.

Schrijf $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ en $A_i = \{x_i\}$. Zij F een ultrafilter van $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$.

Opgave 1(a)

Stel dat X een eindige verzameling is. Bewijs dat elke ultrafilter van $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ van de vorm $F_x = \{U \subseteq X : x \in U\}$ is.

Schrijf $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ en $A_i = \{x_i\}$. Zij F een ultrafilter van $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$. Als er een $i \in \{1, \ldots, n\}$ is zodat $A_i \in F$ dan zijn we klaar.

Opgave 1(a)

Stel dat X een eindige verzameling is. Bewijs dat elke ultrafilter van $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ van de vorm $F_x = \{U \subseteq X : x \in U\}$ is.

Schrijf $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ en $A_i = \{x_i\}$. Zij F een ultrafilter van $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$. Als er een $i \in \{1, \ldots, n\}$ is zodat $A_i \in F$ dan zijn we klaar.

Stel dat geen enkele $A_i \in F$.

Opgave 1(a)

Stel dat X een eindige verzameling is. Bewijs dat elke ultrafilter van $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ van de vorm $F_x = \{U \subseteq X : x \in U\}$ is.

Schrijf $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ en $A_i = \{x_i\}$. Zij F een ultrafilter van $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$. Als er een $i \in \{1, \ldots, n\}$ is zodat $A_i \in F$ dan zijn we klaar.

Stel dat geen enkele $A_i \in F$. Omdat F een ultrafilter is geldt dan $X \setminus A_i \in F$ voor elke i,

Opgave 1(a)

Stel dat X een eindige verzameling is. Bewijs dat elke ultrafilter van $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ van de vorm $F_x = \{U \subseteq X : x \in U\}$ is.

Schrijf $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ en $A_i = \{x_i\}$. Zij F een ultrafilter van $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$. Als er een $i \in \{1, \ldots, n\}$ is zodat $A_i \in F$ dan zijn we klaar.

Stel dat geen enkele $A_i \in F$. Omdat F een ultrafilter is geldt dan $X \setminus A_i \in F$ voor elke i, dus ook

$$\bigcap_{i=1}^{n} X \setminus A_i = \emptyset \in F.$$

Opgave 1(a)

Stel dat X een eindige verzameling is. Bewijs dat elke ultrafilter van $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ van de vorm $F_x = \{U \subseteq X : x \in U\}$ is.

Schrijf $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ en $A_i = \{x_i\}$. Zij F een ultrafilter van $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$. Als er een $i \in \{1, \ldots, n\}$ is zodat $A_i \in F$ dan zijn we klaar.
Stel dat geen enkele $A_i \in F$. Omdat F een ultrafilter is geldt dan $X \setminus A_i \in F$ voor elke i, dus ook

$$\bigcap_{i=1}^{n} X \setminus A_i = \emptyset \in F.$$

Hieruit volgt dat $F = \mathcal{P}(X)$ en dat is een contradictie met de aanname dat F een ultrafilter is.

Opgave 1(b)

Stel dat F een filter is op $(\mathcal{P}(I), \subseteq)$. Bewijs dat $\sim_F$ een transitieve relatie is op $\prod_{i \in I} A_i$.

Opgave 1(b)

Stel dat F een filter is op $(\mathcal{P}(I), \subseteq)$. Bewijs dat $\sim_F$ een transitieve relatie is op $\prod_{i \in I} A_i$.

Stel dat $a \sim_F b$ en $b \sim_F c$.

Opgave 1(b)

Stel dat F een filter is op $(\mathcal{P}(I), \subseteq)$. Bewijs dat $\sim_F$ een transitieve relatie is op $\prod_{i \in I} A_i$.

Stel dat $a \sim_F b$ en $b \sim_F c$. Dit betekent dat

$$\{i \in I : a(i) = b(i)\} \in F$$
$$\{i \in I : b(i) = c(i)\} \in F$$

Opgave 1(b)

Stel dat F een filter is op $(\mathcal{P}(I), \subseteq)$. Bewijs dat $\sim_F$ een transitieve relatie is op $\prod_{i \in I} A_i$.

Stel dat $a \sim_F b$ en $b \sim_F c$. Dit betekent dat

$$\{i \in I : a(i) = b(i)\} \in F$$
$$\{i \in I : b(i) = c(i)\} \in F$$

dus de doorsnede zit ook in F.

Opgave 1(b)

Stel dat F een filter is op $(\mathcal{P}(I), \subseteq)$. Bewijs dat $\sim_F$ een transitieve relatie is op $\prod_{i \in I} A_i$.

Stel dat $a \sim_F b$ en $b \sim_F c$. Dit betekent dat

$$\{i \in I : a(i) = b(i)\} \in F$$
$$\{i \in I : b(i) = c(i)\} \in F$$

dus de doorsnede zit ook in F. Maar nu zien we dat

$$\{i : a(i) = c(i)\} \supseteq \{i : a(i) = b(i)\} \cap \{i : b(i) = c(i)\} \in F,$$

Opgave 1(b)

Stel dat F een filter is op $(\mathcal{P}(I), \subseteq)$. Bewijs dat $\sim_F$ een transitieve relatie is op $\prod_{i \in I} A_i$.

Stel dat $a \sim_F b$ en $b \sim_F c$. Dit betekent dat

$$\{i \in I : a(i) = b(i)\} \in F$$
$$\{i \in I : b(i) = c(i)\} \in F$$

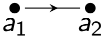
dus de doorsnede zit ook in F. Maar nu zien we dat

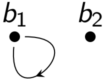
$$\{i : a(i) = c(i)\} \supseteq \{i : a(i) = b(i)\} \cap \{i : b(i) = c(i)\} \in F,$$

oftewel $a \sim_F c$.

Opgave 1(c)

Zij A en B zoals in de figuur. Zij $F = \{\{1\}, \{1,2\}\}$. Beschrijf het ultraproduct.





Opgave 1(c)

Zij A en B zoals in de figuur. Zij $F = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$. Beschrijf het ultraproduct.

De elementen van het Cartesisch product zijn (a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_1, b_2) en (a_2, b_2).

Opgave 1(c)

Zij A en B zoals in de figuur. Zij $F = \{\{1\}, \{1,2\}\}$. Beschrijf het ultraproduct.

De elementen van het Cartesisch product zijn (a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_1, b_2) en (a_2, b_2). Twee paren zijn equivalent als ze op het eerste element overeenstemmen.

Opgave 1(c)

Zij A en B zoals in de figuur. Zij $F = \{\{1\}, \{1,2\}\}$. Beschrijf het ultraproduct.

De elementen van het Cartesisch product zijn (a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_1, b_2) en (a_2, b_2). Twee paren zijn equivalent als ze op het eerste element overeenstemmen.

$$c = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2)\} \qquad d = \{(a_2, b_1), (a_2, b_2)\}$$

Opgave 1(c)

Zij A en B zoals in de figuur. Zij $F = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$. Beschrijf het ultraproduct.

De elementen van het Cartesisch product zijn (a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_1, b_2) en (a_2, b_2). Twee paren zijn equivalent als ze op het eerste element overeenstemmen.

$$c = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2)\} \qquad d = \{(a_2, b_1), (a_2, b_2)\}$$

We hebben

$$R(c, d) \iff R^1(c_1, d_1)$$

Opgave 1(c)

Zij A en B zoals in de figuur. Zij $F = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$. Beschrijf het ultraproduct.

De elementen van het Cartesisch product zijn (a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_1, b_2) en (a_2, b_2). Twee paren zijn equivalent als ze op het eerste element overeenstemmen.

$$c = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2)\} \qquad d = \{(a_2, b_1), (a_2, b_2)\}$$

We hebben

$$R(c, d) \iff R^1(c_1, d_1)$$

en de rechterkant is waar.

Opgave 1(c)

Zij A en B zoals in de figuur. Zij $F = \{\{1\}, \{1,2\}\}$. Beschrijf het ultraproduct.

De elementen van het Cartesisch product zijn (a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_1, b_2) en (a_2, b_2). Twee paren zijn equivalent als ze op het eerste element overeenstemmen.

$$c = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2)\} \longrightarrow d = \{(a_2, b_1), (a_2, b_2)\}$$

We hebben

$$R(c, d) \iff R^1(c_1, d_1)$$

en de rechterkant is waar.

Opgave 1(c)

Zij A en B zoals in de figuur. Zij $F = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$. Beschrijf het ultraproduct.

De elementen van het Cartesisch product zijn (a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_1, b_2) en (a_2, b_2). Twee paren zijn equivalent als ze op het eerste element overeenstemmen.

$$c = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2)\} \longrightarrow d = \{(a_2, b_1), (a_2, b_2)\}$$

We hebben

$$R(c, d) \iff R^1(c_1, d_1)$$

en de rechterkant is waar. Dit beschrijft het ultraproduct.

Opgave 2

Beschrijf V_4 en V_5.

Opgave 2

Beschrijf V_4 en V_5.

$$V_0 = \emptyset$$
$$V_1 = \{\emptyset\}$$
$$V_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$
$$V_3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

Opgave 2

Beschrijf V_4 en V_5.

$$
\begin{aligned}
V_0 &= \emptyset \\
V_1 &= \{\emptyset\} \\
V_2 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
V_3 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}
\end{aligned}
$$

We hebben $V_0 := \emptyset$ en $V_{n+1} = \mathcal{P}(V_n)$.

Opgave 2

Beschrijf V_4 en V_5.

$$\begin{aligned} V_0 &= \emptyset \\ V_1 &= \{\emptyset\} \\ V_2 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ V_3 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \end{aligned}$$

We hebben $V_0 := \emptyset$ en $V_{n+1} = \mathcal{P}(V_n)$.

$$\begin{aligned} V_4 = \{&\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}, \\ &\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \\ &\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \\ &\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} \end{aligned}$$

Opgave 2

Beschrijf V_4 en V_5.

$$V_0 = \emptyset$$
$$V_1 = \{\emptyset\}$$
$$V_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$
$$V_3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

We hebben $V_0 := \emptyset$ en $V_{n+1} = \mathcal{P}(V_n)$. Dit geeft de recursieve relatie $|V_0| = 1$ en $|V_n| = 2^{|V_{n-1}|}$.

$$V_4 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

Opgave 2

Beschrijf V_4 en V_5.

$$\begin{aligned} V_0 &= \emptyset \\ V_1 &= \{\emptyset\} \\ V_2 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ V_3 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \end{aligned}$$

We hebben $V_0 := \emptyset$ en $V_{n+1} = \mathcal{P}(V_n)$. Dit geeft de recursieve relatie $|V_0| = 1$ en $|V_n| = 2^{|V_{n-1}|}$. Het aantal elementen van V_n is dus $2 \uparrow\uparrow n - 1$.

$$\begin{aligned} V_4 = \{&\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}, \\ &\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \\ &\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \\ &\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} \end{aligned}$$

Opgave 2

Beschrijf V_4 en V_5.

$$V_0 = \emptyset$$
$$V_1 = \{\emptyset\}$$
$$V_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$
$$V_3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

We hebben $V_0 := \emptyset$ en $V_{n+1} = \mathcal{P}(V_n)$. Dit geeft de recursieve relatie $|V_0| = 1$ en $|V_n| = 2^{|V_{n-1}|}$. Het aantal elementen van V_n is dus $2 \uparrow\uparrow n-1$. Hieruit volgt dat $|V_5| = 65536$.

$$V_4 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

Opgave 2

Beschrijf V_4 en V_5.

$$
\begin{aligned}
V_0 &= \emptyset \\
V_1 &= \{\emptyset\} \\
V_2 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
V_3 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}
\end{aligned}
$$

We hebben $V_0 := \emptyset$ en $V_{n+1} = \mathcal{P}(V_n)$. Dit geeft de recursieve relatie $|V_0| = 1$ en $|V_n| = 2^{|V_{n-1}|}$. Het aantal elementen van V_n is dus $2 \uparrow\uparrow n - 1$. Hieruit volgt dat $|V_5| = 65536$.

$$
\begin{aligned}
V_4 = \{&\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}, \\
&\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \\
&\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \\
&\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}
\end{aligned}
$$

De verzameling V_5 kun je in een los bestand downloaden.

Opgave 3

Bewijs in ZFC + AF dat voor elke verzameling a we $a \notin a$ hebben.

Opgave 3

Bewijs in ZFC + AF dat voor elke verzameling a we $a \notin a$ hebben.

Bekijk de verzameling $\{a\}$.

Opgave 3

Bewijs in ZFC + AF dat voor elke verzameling a we $a \notin a$ hebben.

Bekijk de verzameling $\{a\}$. Volgens het funderingsaxioma bestaat er een $y \in \{a\}$ zodat $y \cap \{a\} = \emptyset$.

Opgave 3

Bewijs in ZFC + AF dat voor elke verzameling a we $a \notin a$ hebben.

Bekijk de verzameling $\{a\}$. Volgens het funderingsaxioma bestaat er een $y \in \{a\}$ zodat $y \cap \{a\} = \emptyset$. Omdat $\{a\}$ maar één element bevat geldt $y = a$ dus $a \cap \{a\} = \emptyset$.

Opgave 3

Bewijs in ZFC + AF dat voor elke verzameling a we $a \notin a$ hebben.

Bekijk de verzameling $\{a\}$. Volgens het funderingsaxioma bestaat er een $y \in \{a\}$ zodat $y \cap \{a\} = \emptyset$. Omdat $\{a\}$ maar één element bevat geldt $y = a$ dus $a \cap \{a\} = \emptyset$. Als we nu $a \in a$ zouden hebben dat geldt $a \in a \cap \{a\}$

Opgave 3

Bewijs in ZFC + AF dat voor elke verzameling a we $a \notin a$ hebben.

Bekijk de verzameling $\{a\}$. Volgens het funderingsaxioma bestaat er een $y \in \{a\}$ zodat $y \cap \{a\} = \emptyset$. Omdat $\{a\}$ maar één element bevat geldt $y = a$ dus $a \cap \{a\} = \emptyset$. Als we nu $a \in a$ zouden hebben dat geldt $a \in a \cap \{a\}$ en dat is een tegenspraak. Dit bewijst dat $a \notin a$.

Opgave 4

Bewijs dat er een kleinste inductieve verzameling bestaat.

Opgave 4

Bewijs dat er een kleinste inductieve verzameling bestaat.

Zij x de verzameling gecreëerd door INF.

Opgave 4

Bewijs dat er een kleinste inductieve verzameling bestaat.

Zij x de verzameling gecreëerd door INF. Definieer

$$\omega := \{z : z \in x \text{ en voor elke inductieve } y \text{ geldt } z \in y\}.$$

Opgave 4

Bewijs dat er een kleinste inductieve verzameling bestaat.

Zij x de verzameling gecreëerd door INF. Definieer

$$\omega := \{z : z \in x \text{ en voor elke inductieve } y \text{ geldt } z \in y\}.$$

We zien dat $\emptyset \in \omega$ en voor elke $z \in \omega$ geldt ook $z \cup \{z\} \in \omega$, dus ω is inductief.

Opgave 4

Bewijs dat er een kleinste inductieve verzameling bestaat.

Zij x de verzameling gecreëerd door INF. Definieer

$$\omega := \{z : z \in x \text{ en voor elke inductieve } y \text{ geldt } z \in y\}.$$

We zien dat $\emptyset \in \omega$ en voor elke $z \in \omega$ geldt ook $z \cup \{z\} \in \omega$, dus ω is inductief.
Voor een inductieve verzameling y geldt $z \in \omega \to z \in y$ dus $\omega \subseteq y$.

Opgave 4

Bewijs dat er een kleinste inductieve verzameling bestaat.

Zij x de verzameling gecreëerd door INF. Definieer

$$\omega := \{z : z \in x \text{ en voor elke inductieve } y \text{ geldt } z \in y\}.$$

We zien dat $\emptyset \in \omega$ en voor elke $z \in \omega$ geldt ook $z \cup \{z\} \in \omega$, dus ω is inductief.
Voor een inductieve verzameling y geldt $z \in \omega \to z \in y$ dus $\omega \subseteq y$. Dit bewijst dat ω de kleinste inductieve verzameling is.