



# Wiskunde logica

Werkcollege 13

Jolien Oomens  
22 mei 2017

## Opgave 1(a)

Stel dat  $X$  een eindige verzameling is. Bewijs dat elke ultrafilter van  $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$  van de vorm  $F_x = \{U \subseteq X : x \in U\}$  is.

Schrijf  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  en  $A_i = \{x_i\}$ . Zij  $F$  een ultrafilter van  $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ . Als er een  $i \in \{1, \dots, n\}$  is zodat  $A_i \in F$  dan zijn we klaar.

Stel dat geen enkele  $A_i \in F$ . Omdat  $F$  een ultrafilter is geldt dan  $X \setminus A_i \in F$  voor elke  $i$ , dus ook

$$\bigcap_{i=1}^n X \setminus A_i = \emptyset \in F.$$

Hieruit volgt dat  $F = \mathcal{P}(X)$  en dat is een contradictie met de aanname dat  $F$  een ultrafilter is.



## Opgave 1(b)

Stel dat  $F$  een filter is op  $(\mathcal{P}(I), \subseteq)$ . Bewijs dat  $\sim_F$  een transitieve relatie is op  $\prod_{i \in I} A_i$ .

Stel dat  $a \sim_F b$  en  $b \sim_F c$ . Dit betekent dat

$$\begin{aligned} \{i \in I : a(i) = b(i)\} &\in F \\ \{i \in I : b(i) = c(i)\} &\in F \end{aligned}$$

dus de doorsnede zit ook in  $F$ . Maar nu zien we dat

$$\{i : a(i) = c(i)\} \supseteq \{i : a(i) = b(i)\} \cap \{i : b(i) = c(i)\} \in F,$$

oftewel  $a \sim_F c$ .



## Opgave 1(c)

Zij  $A$  en  $B$  zoals in de figuur. Zij  $F = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ . Beschrijf het ultraproduct.



De elementen van het Cartesisch product zijn  $(a_1, b_1)$ ,  $(a_2, b_1)$ ,  $(a_1, b_2)$  en  $(a_2, b_2)$ . Twee paren zijn equivalent als ze op het eerste element overeenstemmen.

$$c = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2)\} \sim d = \{(a_2, b_1), (a_2, b_2)\}$$

We hebben

$$R(c, d) \iff R^1(c_1, d_1)$$

en de rechterkant is waar. Dit beschrijft het ultraproduct.



## Opgave 2

Beschrijf  $V_4$  en  $V_5$ .

$$V_0 = \emptyset$$

$$V_1 = \{\emptyset\}$$

$$V_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$V_3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

We hebben  $V_0 := \emptyset$  en  $V_{n+1} = \mathcal{P}(V_n)$ . Dit geeft de recursieve relatie  $|V_0| = 1$  en  $|V_n| = 2^{|V_{n-1}|}$ . Het aantal elementen van  $V_n$  is dus  $2 \uparrow \uparrow n - 1$ . Hieruit volgt dat  $|V_5| = 65536$ .

$$V_4 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}\}$$



De verzameling  $V_5$  kun je in een los bestand downloaden.

## Opgave 3

Bewijs in ZFC + AF dat voor elke verzameling  $a$  we  $a \notin a$  hebben.

Bekijk de verzameling  $\{a\}$ . Volgens het funderingsaxioma bestaat er een  $y \in \{a\}$  zodat  $y \cap \{a\} = \emptyset$ . Omdat  $\{a\}$  maar één element bevat geldt  $y = a$  dus  $a \cap \{a\} = \emptyset$ . Als we nu  $a \in a$  zouden hebben dat geldt  $a \in a \cap \{a\}$  en dat is een tegenspraak. Dit bewijst dat  $a \notin a$ .



## Opgave 4

Bewijs dat er een kleinste inductieve verzameling bestaat.

Zij  $x$  de verzameling gecreëerd door INF. Definieer

$$\omega := \{z : z \in x \text{ en voor elke inductieve } y \text{ geldt } z \in y\}.$$

We zien dat  $\emptyset \in \omega$  en voor elke  $z \in \omega$  geldt ook  $z \cup \{z\} \in \omega$ , dus  $\omega$  is inductief.

Voor een inductieve verzameling  $y$  geldt  $z \in \omega \rightarrow z \in y$  dus  $\omega \subseteq y$ . Dit bewijst dat  $\omega$  de kleinste inductieve verzameling is.

