Wiskunde logica

Werkcollege 2

Jolien Oomens

17 februari 2017

Opgave 1

Bewijs met inductie dat $\circ$ en $\circ \circ e$ geen S_{gr}-termen zijn.

- Allereerst kun je met inductie naar de complexiteit van een term bewijzen dat het aantal symbolen van een term minstens 1 is.
- Daarna kun je met inductie bewijzen dat het symbool $\circ$ in een term altijd gevolgd wordt door twee termen. Hieruit volgt dat $\circ$ zelf geen term kan zijn.
- Op precies dezelfde manier kan $\circ \circ e$ ook geen term zijn.

Opgave 2

Geef een inductieve definitie van de functie die aan een formule de verzameling van strikte deelformules toewijst.

We definiëren dit met inductie naar de complexiteit:

$$\begin{aligned}
\mathrm{PSF}(t_1 \equiv t_2) &= \emptyset \\
\mathrm{PSF}(Rt_1 \dots t_n) &= \emptyset \\
\mathrm{PSF}(\neg\varphi) &= \{\varphi\} \cup \mathrm{PSF}(\varphi) \\
\mathrm{PSF}(\varphi \vee \psi) &= \{\varphi, \psi\} \cup \mathrm{PSF}(\varphi) \cup \mathrm{PSF}(\psi) \\
\mathrm{PSF}(\varphi \wedge \psi) &= \{\varphi, \psi\} \cup \mathrm{PSF}(\varphi) \cup \mathrm{PSF}(\psi) \\
\mathrm{PSF}(\varphi \rightarrow \psi) &= \{\varphi, \psi\} \cup \mathrm{PSF}(\varphi) \cup \mathrm{PSF}(\psi) \\
\mathrm{PSF}(\varphi \leftrightarrow \psi) &= \{\varphi, \psi\} \cup \mathrm{PSF}(\varphi) \cup \mathrm{PSF}(\psi) \\
\mathrm{PSF}(\forall x\varphi) &= \{\varphi\} \cup \mathrm{PSF}(\varphi) \\
\mathrm{PSF}(\exists x\varphi) &= \{\varphi\} \cup \mathrm{PSF}(\varphi).
\end{aligned}$$

Vergelijk dit zelf met Definitie 4.5 uit het boek.

Opgave 3

Geef een inductieve definitie van formules in de propositielogica en definieer SF voor deze formules.

Herinner dat formules in de propositielogica bestaan uit propositieletters $P, Q, \dots$ en connectieven $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$.
Inductief:

- Elke propositieletter is een formule.
- Als φ en ψ formules zijn, dan zijn $\neg\varphi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ en $\varphi \leftrightarrow \psi$ dat ook.

We definiëren nu

$$\begin{aligned}
\mathrm{SF}(X) &= \{X\} \text{ als } X \text{ een propositieletter is} \\
\mathrm{SF}(\neg\varphi) &= \{\neg\varphi\} \cup \mathrm{SF}(\varphi) \\
\mathrm{SF}(\varphi * \psi) &= \{\varphi * \psi\} \cup \mathrm{SF}(\varphi) \cup \mathrm{SF}(\psi) \text{ als } * \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}.
\end{aligned}$$

Opgave 4

Zij $A \neq \emptyset$ eindig en zij S een eindige verzameling van symbolen. Bewijs dat er eindig veel S-structuren zijn met domein A.

Definitie: S-structuur

Een S-structuur is een paar $(\mathfrak{A}, \mathfrak{a})$ met $A \neq \emptyset$ en een afbeelding $\mathfrak{a}$ zodat

- (i) Voor elk relatiesymbool $R \in S$ van ariteit n is $\mathfrak{a}(R)$ een relatie op A van ariteit n.
- (ii) Voor elk functieymbool $f \in S$ van ariteit n is $\mathfrak{a}(f)$ een functie op A van ariteit n.
- (iii) Voor elke constante $c \in S$ geldt $\mathfrak{a}(c) \in A$.

Voor elk van deze drie dingen zijn er maar eindig veel mogelijkheden.

Opgave 6

Bekijk de calculus $\mathfrak{C}_v$. Bewijs dat voor alle variabelen x en alle S-termen t, xt bewijsbaar is dan en slechts dan als $x \in \text{var}(t)$.

"$\Longrightarrow$" Met inductie zullen we bewijzen dat voor alle n de volgende uitspraak waar is:

Als xt in n stappen is bewezen dan geldt $x \in \text{var}(t)$.

De uitspraak is zeker waar voor $n = 0$, want dan is de antecedent onwaar. Stel nu dat de uitspraak geldt voor alle $m \leq n$ en stel dat xt is bewezen in $n + 1$ stappen. Er zijn dan twee mogelijke laatste stappen:

(1) Als de eerste regel is gebruikt hebben we $xt = xx$, dus $t = x$ waardoor $x \in \text{var}(t)$.

(2) Als de tweede regel is gebruikt dan zijn er $f \in S$ en $t_1, \ldots, t_n$ zodat xt_i al bewezen is en $ft_1 \ldots t_n = t$. Uit de inductie-hypothese volgt dat $x \in \text{var}(t_i)$ dus geldt er ook $x \in \text{var}(t_1) \cup \cdots \cup \text{var}(t_n) = \text{var}(ft_1 \ldots t_n) = \text{var}(t)$.

Opgave 6

Bekijk de calculus $\mathfrak{C}_v$. Bewijs dat voor alle variabelen x en alle S-termen t, xt bewijsbaar is dan en slechts dan als $x \in \text{var}(t)$.

"$\Longleftarrow$" Met inductie naar de complexiteit van t bewijzen we:

Als $x \in \text{var}(t)$ dan is xt bewijsbaar.

(T1) Als t een variabele is dan geldt $\text{var}(t) = \{t\}$, dus $x \in \text{var}(t)$ impliceert $x = t$. Er geldt dus $xt = xx$ en dit bewijsbaar dankzij de eerste regel.

(T2) Als t een constante is dan geldt $\text{var}(t) = \emptyset$ dus $x \notin \text{var}(t)$.

(T3) Stel dat $t_1, \ldots, t_n$ S-termen zijn en dat $f \in S$ met $t = ft_1 \ldots t_n$. Er geldt

$$x \in \text{var}(t) = \text{var}(f(t_1 \ldots t_n)) = \text{var}(t_1) \cup \cdots \cup \text{var}(t_n),$$

dus $x \in \text{var}(t_i)$ voor een zekere $1 \leq i \leq n$. Volgens de inductiehypothese is xt_i bewijsbaar. Nu kunnen we xt bewijzen met de tweede regel. $\square$