

Wiskunde logica

Werkcollege 6

Jolien Oomens

17 maart 2017



Opgave 1

Welke van deze formules zijn af te leiden? (a) $\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}$ (b) $\frac{\Gamma \vdash \exists x \varphi}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}$.



Opgave 1

Welke van deze formules zijn af te leiden? (a) $\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}$ (b) $\frac{\Gamma \vdash \exists x \varphi}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}$.

Een mogelijk bewijs voor de eerste claim is

$\Gamma \vdash \varphi$	(Premisse)
$\Gamma \vdash \psi$	(Premisse)
$\Gamma, \neg \varphi \vdash \neg \varphi$	(Aanname)
$\Gamma, \neg \varphi \vdash \varphi$	(Antecedent)
$\Gamma, \neg \varphi \vdash \neg \psi$	(Contradictie')
$\Gamma, \neg \psi \vdash \neg \psi$	(Aanname)
$\Gamma, \neg \varphi \vee \neg \psi \vdash \neg \psi$	($\vee A$)
$\Gamma, \psi \vdash \neg(\neg \varphi \vee \neg \psi)$	(Contrapositie (d))
$\Gamma \vdash \neg(\neg \varphi \vee \neg \psi)$	(Kettingregel).



Opgave 1

Welke van deze formules zijn af te leiden? (a) $\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}$ (b) $\frac{\Gamma \vdash \exists x \varphi}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}$.

Een mogelijk bewijs voor de eerste claim is

$\Gamma \vdash \varphi$	(Premisse)
$\Gamma \vdash \psi$	(Premisse)
$\Gamma, \neg \varphi \vdash \neg \varphi$	(Aanname)
$\Gamma, \neg \varphi \vdash \varphi$	(Antecedent)
$\Gamma, \neg \varphi \vdash \neg \psi$	(Contradictie')
$\Gamma, \neg \psi \vdash \neg \psi$	(Aanname)
$\Gamma, \neg \varphi \vee \neg \psi \vdash \neg \psi$	($\vee A$)
$\Gamma, \psi \vdash \neg(\neg \varphi \vee \neg \psi)$	(Contrapositie (d))
$\Gamma \vdash \neg(\neg \varphi \vee \neg \psi)$	(Kettingregel).

De tweede regel is incorrect en dus ook niet af te leiden.

Opgave 1

Welke van deze formules zijn af te leiden? (c) $\frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}$ (d) $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}$.



Opgave 1

Welke van deze formules zijn af te leiden? (c) $\frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}$ (d) $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}$.

Een bewijs voor (c) is

$\Gamma \vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ (Premisse)

$\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\varphi$ (Aanname)

$\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$ ($\vee S$)

$\Gamma, \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vdash \varphi$ (Contrapositie (c))

$\Gamma \vdash \varphi$ (Kettingregel)



Opgave 1

Welke van deze formules zijn af te leiden? (c) $\frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}$ (d) $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}$.

Een bewijs voor (c) is

$\Gamma \vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	(Premisse)
$\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\varphi$	(Aanname)
$\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$	(\vee S)
$\Gamma, \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vdash \varphi$	(Contrapositie (c))
$\Gamma \vdash \varphi$	(Kettingregel)

en een bewijs voor (d) is

$\Gamma, \varphi \vdash \psi$	(Premisse)
$\Gamma, \varphi \vdash \neg\varphi \vee \psi$	(\vee S)
$\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\varphi \vee \psi$	(\vee S)
$\Gamma \vdash \neg\varphi \vee \psi$	(Gevalsonderscheiding).



Opgave 1

Welke van deze formules zijn af te leiden? (e) $\frac{\varphi \vee \psi \vdash \chi}{\varphi \vdash \chi}$.



Opgave 1

Welke van deze formules zijn af te leiden? (e) $\frac{\varphi \vee \psi \vdash \chi}{\varphi \vdash \chi}$.

We hebben in huiswerk 1 gezien dat deze regel correct is.



Opgave 1

Welke van deze formules zijn af te leiden? (e) $\frac{\varphi \vee \psi \vdash \chi}{\varphi \vdash \chi}$.

We hebben in huiswerk 1 gezien dat deze regel correct is. Een formeel bewijs is:

$$\begin{array}{ll} \varphi \vee \psi \vdash \chi & \text{(Premisse)} \\ \varphi \vdash \varphi \vee \psi & (\vee S) \\ \varphi \vdash \chi & \text{(Kettingregel)}. \end{array}$$



Opgave 2a

Geef een bewijs voor $\frac{\Gamma \vdash \forall x \varphi}{\Gamma \vdash \varphi_x}$



Opgave 2a

Geef een bewijs voor $\frac{\Gamma \vdash \forall x \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \frac{t}{x}}$

Een mogelijkheid is

$\Gamma \vdash \neg \exists x \neg \varphi$	(Premisse)
$\Gamma, \neg \varphi \frac{t}{x} \vdash \neg \varphi \frac{t}{x}$	(Aanname)
$\Gamma, \neg \varphi \frac{t}{x} \vdash \exists x \neg \varphi$	(\exists S)
$\Gamma, \neg \exists x \neg \varphi \vdash \varphi \frac{t}{x}$	(Contrapositie (c))
$\Gamma \vdash \varphi \frac{t}{x}$	(Kettingregel)



Opgave 3

Bepaal welke regels correct zijn: (a) $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \exists x \varphi}$ (b) $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \forall x \varphi}$



Opgave 3

Bepaal welke regels correct zijn: (a) $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \exists x \varphi}$ (b) $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \forall x \varphi}$

(a) Stel dat $\mathfrak{J} \models \Gamma$ en $\mathfrak{J} \models \forall x \varphi$.



Opgave 3

Bepaal welke regels correct zijn: (a) $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \exists x \varphi}$ (b) $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \forall x \varphi}$

- (a) Stel dat $\mathfrak{J} \models \Gamma$ en $\mathfrak{J} \models \forall x \varphi$. Dan geldt voor alle $a \in A$ dat $\mathfrak{J}_x^a \models \varphi$.



Opgave 3

Bepaal welke regels correct zijn: (a) $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \exists x \varphi}$ (b) $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \forall x \varphi}$

- (a) Stel dat $\mathfrak{J} \models \Gamma$ en $\mathfrak{J} \models \forall x \varphi$. Dan geldt voor alle $a \in A$ dat $\mathfrak{J}_x^a \models \varphi$. In het bijzonder geldt het dus voor $a_0 = \beta(x) = \mathfrak{J}(x)$.



Opgave 3

Bepaal welke regels correct zijn: (a) $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \exists x \varphi}$ (b) $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \forall x \varphi}$

- (a) Stel dat $\mathfrak{J} \models \Gamma$ en $\mathfrak{J} \models \forall x \varphi$. Dan geldt voor alle $a \in A$ dat $\mathfrak{J} \stackrel{a}{x} \models \varphi$. In het bijzonder geldt het dus voor $a_0 = \beta(x) = \mathfrak{J}(x)$. Er geldt dus $\mathfrak{J} \stackrel{a_0}{x} \models \varphi$ dus $\mathfrak{J} \models \varphi$,



Opgave 3

Bepaal welke regels correct zijn: (a) $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \exists x \varphi}$ (b) $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \forall x \varphi}$

- (a) Stel dat $\mathfrak{J} \models \Gamma$ en $\mathfrak{J} \models \forall x \varphi$. Dan geldt voor alle $a \in A$ dat $\mathfrak{J} \stackrel{a}{x} \models \varphi$. In het bijzonder geldt het dus voor $a_0 = \beta(x) = \mathfrak{J}(x)$. Er geldt dus $\mathfrak{J} \stackrel{a_0}{x} \models \varphi$ dus $\mathfrak{J} \models \varphi$, dus volgens de premisse geldt dan ook $\mathfrak{J} \models \psi$



Opgave 3

Bepaal welke regels correct zijn: (a) $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \exists x \varphi}$ (b) $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \forall x \varphi}$

- (a) Stel dat $\mathfrak{J} \models \Gamma$ en $\mathfrak{J} \models \forall x \varphi$. Dan geldt voor alle $a \in A$ dat $\mathfrak{J} \stackrel{a}{x} \models \varphi$. In het bijzonder geldt het dus voor $a_0 = \beta(x) = \mathfrak{J}(x)$. Er geldt dus $\mathfrak{J} \stackrel{a_0}{x} \models \varphi$ dus $\mathfrak{J} \models \varphi$, dus volgens de premisse geldt dan ook $\mathfrak{J} \models \psi$ en daaruit volgt dat $\mathfrak{J} \models \varphi \stackrel{a_0}{x}$



Opgave 3

Bepaal welke regels correct zijn: (a) $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \exists x \varphi}$ (b) $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \forall x \varphi}$

- (a) Stel dat $\mathfrak{J} \models \Gamma$ en $\mathfrak{J} \models \forall x \varphi$. Dan geldt voor alle $a \in A$ dat $\mathfrak{J} \stackrel{a}{x} \models \varphi$. In het bijzonder geldt het dus voor $a_0 = \beta(x) = \mathfrak{J}(x)$. Er geldt dus $\mathfrak{J} \stackrel{a_0}{x} \models \varphi$ dus $\mathfrak{J} \models \varphi$, dus volgens de premisse geldt dan ook $\mathfrak{J} \models \psi$ en daaruit volgt dat $\mathfrak{J} \models \varphi \stackrel{a_0}{x}$ dus inderdaad $\mathfrak{J} \models \exists x \varphi$.



Opgave 3

Bepaal welke regels correct zijn: (a) $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \exists x \varphi}$ (b) $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \forall x \varphi}$

- (a) Stel dat $\mathfrak{J} \models \Gamma$ en $\mathfrak{J} \models \forall x \varphi$. Dan geldt voor alle $a \in A$ dat $\mathfrak{J} \stackrel{a}{x} \models \varphi$. In het bijzonder geldt het dus voor $a_0 = \beta(x) = \mathfrak{J}(x)$. Er geldt dus $\mathfrak{J} \stackrel{a_0}{x} \models \varphi$ dus $\mathfrak{J} \models \varphi$, dus volgens de premisse geldt dan ook $\mathfrak{J} \models \psi$ en daaruit volgt dat $\mathfrak{J} \models \varphi \stackrel{a_0}{x}$ dus inderdaad $\mathfrak{J} \models \exists x \varphi$. (We gebruikten hier twee dingen: het Substitutielemma en $\mathfrak{J} = \mathfrak{J} \stackrel{a_0}{x}$.)



Opgave 3

Bepaal welke regels correct zijn: (a) $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \exists x \varphi}$ (b) $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \forall x \varphi}$

- (a) Stel dat $\mathfrak{J} \models \Gamma$ en $\mathfrak{J} \models \forall x \varphi$. Dan geldt voor alle $a \in A$ dat $\mathfrak{J} \stackrel{a}{x} \models \varphi$. In het bijzonder geldt het dus voor $a_0 = \beta(x) = \mathfrak{J}(x)$. Er geldt dus $\mathfrak{J} \stackrel{a_0}{x} \models \varphi$ dus $\mathfrak{J} \models \varphi$, dus volgens de premisse geldt dan ook $\mathfrak{J} \models \psi$ en daaruit volgt dat $\mathfrak{J} \models \varphi \stackrel{a_0}{x}$ dus inderdaad $\mathfrak{J} \models \exists x \varphi$. (We gebruikten hier twee dingen: het Substitutielemma en $\mathfrak{J} = \mathfrak{J} \stackrel{a_0}{x}$.)
- (b) Neem $\Gamma = \{Rxx\}$, $\varphi = x \equiv x$ en $\psi = Rxx$. Dit is dus incorrect.



Opgave 3

Bepaal welke regels correct zijn: (c) $\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \frac{fy}{x}}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}$ als f unair is en f en y niet voorkomen in Γ en $\forall x \varphi$ (d) $\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \frac{fy}{x}}{\Gamma \vdash \exists x \varphi}$ als f unair is.



Opgave 3

Bepaal welke regels correct zijn: (c) $\frac{\Gamma \vdash \varphi \frac{fy}{x}}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}$ als f unair is en f en y niet voorkomen in Γ en $\forall x \varphi$ (d) $\frac{\Gamma \vdash \varphi \frac{fy}{x}}{\Gamma \vdash \exists x \varphi}$ als f unair is.

- (c) Deze regel is incorrect. Wat gebeurt er als f alles op één punt afbeeldt?



Opgave 3

Bepaal welke regels correct zijn: (c) $\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \frac{fy}{x}}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}$ als f unair is en f en y niet voorkomen in Γ en $\forall x \varphi$ (d) $\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \frac{fy}{x}}{\Gamma \vdash \exists x \varphi}$ als f unair is.

- (c) Deze regel is incorrect. Wat gebeurt er als f alles op één punt afbeeldt?
- (d) Deze regel is correct, want je kunt een x in het beeld van f bekijken. Je gebruikt dan dat een domein niet leeg mag zijn.

