Wiskunde logica

Werkcollege 6

Jolien Oomens

17 maart 2017

Opgave 1

Welke van deze formules zijn af te leiden? (a) $\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}$ (b) $\frac{\Gamma \vdash \exists x \varphi}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}$.

Een mogelijk bewijs voor de eerste claim is

$$
\begin{array}{rr}
\Gamma \vdash \varphi & \text{(Premisse)} \\
\Gamma \vdash \psi & \text{(Premisse)} \\
\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\varphi & \text{(Aanname)} \\
\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi & \text{(Antecedent)} \\
\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\psi & \text{(Contradictie')} \\
\Gamma, \neg\psi \vdash \neg\psi & \text{(Aanname)} \\
\Gamma, \neg\varphi \vee \neg\psi \vdash \neg\psi & (\vee\text{A}) \\
\Gamma, \psi \vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) & \text{(Contrapositie (d))} \\
\Gamma \vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) & \text{(Kettingregel).}
\end{array}
$$

De tweede regel is incorrect en dus ook niet af te leiden.

Opgave 1

Welke van deze formules zijn af te leiden? (c) $\frac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}$ (d) $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}$.

Een bewijs voor (c) is

$$
\begin{array}{rr}
\Gamma \vdash \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) & \text{(Premisse)} \\
\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\varphi & \text{(Aanname)} \\
\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi & (\vee\text{S}) \\
\Gamma, \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \vdash \varphi & \text{(Contrapositie (c))} \\
\Gamma \vdash \varphi & \text{(Kettingregel)}
\end{array}
$$

en een bewijs voor (d) is

$$
\begin{array}{rr}
\Gamma, \varphi \vdash \psi & \text{(Premisse)} \\
\Gamma, \varphi \vdash \neg\varphi \vee \psi & (\vee\text{S}) \\
\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\varphi \vee \psi & (\vee\text{S}) \\
\Gamma \vdash \neg\varphi \vee \psi & \text{(Gevalsonderscheiding).}
\end{array}
$$

Opgave 1

Welke van deze formules zijn af te leiden? (e) $\frac{\varphi \vee \psi \vdash \chi}{\varphi \vdash \chi}$.

We hebben in huiswerk 1 gezien dat deze regel correct is. Een formeel bewijs is:

$$
\begin{array}{rr}
\varphi \vee \psi \vdash \chi & \text{(Premisse)} \\
\varphi \vdash \varphi \vee \psi & (\vee\text{S}) \\
\varphi \vdash \chi & \text{(Kettingregel).}
\end{array}
$$

Opgave 2a

Geef een bewijs voor $\frac{\Gamma \vdash \forall x \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \frac{t}{x}}$

Een mogelijkheid is

$$
\begin{array}{rr}
\Gamma \vdash \neg \exists x \neg \varphi & \text{(Premisse)} \\
\Gamma, \neg \varphi \frac{t}{x} \vdash \neg \varphi \frac{t}{x} & \text{(Aanname)} \\
\Gamma, \neg \varphi \frac{t}{x} \vdash \exists x \neg \varphi & (\exists \mathrm{S}) \\
\Gamma, \neg \exists x \neg \varphi \vdash \varphi \frac{t}{x} & \text{(Contrapositie (c))} \\
\Gamma \vdash \varphi \frac{t}{x} & \text{(Kettingregel)}
\end{array}
$$

Opgave 3

Bepaal welke regels correct zijn: (a) $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \exists x \varphi}$ (b) $\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \forall x \varphi}$

(a) Stel dat $\mathfrak{I} \models \Gamma$ en $\mathfrak{I} \models \forall x \varphi$. Dan geldt voor alle $a \in A$ dat $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$. In het bijzonder geldt het dus voor $a_0 = \beta(x) = \mathfrak{I}(x)$. Er geldt dus $\mathfrak{I}\frac{a_0}{x} \models \varphi$ dus $\mathfrak{I} \models \varphi$, dus volgens de premisse geldt dan ook $\mathfrak{I} \models \psi$ en daaruit volgt dat $\mathfrak{I} \models \varphi \frac{a_0}{x}$ dus inderdaad $\mathfrak{I} \models \exists x \varphi$. (We gebruikten hier twee dingen: het Substitutielemma en $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}\frac{a_0}{x}$.)

(b) Neem $\Gamma = \{Rxx\}$, $\varphi = x \equiv x$ en $\psi = Rxx$. Dit is dus incorrect.

Opgave 3

Bepaal welke regels correct zijn: (c) $\frac{\Gamma \vdash \varphi \frac{fy}{x}}{\Gamma \vdash \forall x \varphi}$ als f unair is en f en y niet voorkomen in Γ en $\forall x \varphi$ (d) $\frac{\Gamma \vdash \varphi \frac{fy}{x}}{\Gamma \vdash \exists x \varphi}$ als f unair is.

(c) Deze regel is incorrect. Wat gebeurt er als f alles op één punt afbeeldt?

(d) Deze regel is correct, want je kunt een x in het beeld van f bekijken. Je gebruikt dan dat een domein niet leeg mag zijn.