Wiskunde logica

Werkcollege 7

Jolien Oomens

24 maart 2017

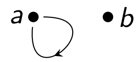
Opgave 1

Geef een voorbeeld van een verzameling Φ zodat (a) Φ consistent is (b) Φ niet negatie-compleet is (c) Φ geen getuigen bevat.

(a) De verzameling $\Phi = \{\exists x \neg (x \equiv x)\}$ is inconsistent.

(b) Neem $\Phi = \emptyset$. Je kunt niet bewijzen dat $\exists x Rxx$ maar ook niet dat $\neg \exists x Rxx$.

(c) Neem $\Phi = \emptyset$. Dit heeft geen getuige voor de formule $\varphi = Rxx$. Bekijk de volgende structuur:



Wanneer we de bedeling $\beta(x) = b$ nemen dan zien we dat $\mathfrak{J} \models \exists x \varphi$ maar volgens het substitutielemma geldt $\mathfrak{J} \models \varphi tx \iff \mathfrak{J}\frac{\mathfrak{J}(t)}{x} \models \varphi$. Omdat er geen constanten en functies zijn wordt elke term door $\mathfrak{J}$ afgebeeld op b en daar is Rxx onwaar. Er kan dus geen getuige zijn. $\square$

Opgave 2

Zij $S = \{Q, R\}$. (a) Geef de term-structuur $\mathfrak{J}^{\emptyset}$. (b) Geef de term-interpretatie $\mathfrak{J}^{\Phi}$ voor $\Phi = \{Qv_0 \wedge Rv_1\}$. Geldt $\mathfrak{J}^{\Phi} \models \Phi$?

(a) Er kan niets bewezen worden behalve $x \equiv x$, dus $T = T^S$ en er zijn geen relaties.

(b) We hebben nog steeds $T = T^S$. De relaties zijn $Q\overline{v_0}$ en $R\overline{v_1}$. Er geldt $\mathfrak{J}^{\Phi} \models \Phi$ ($\approx$ Lemma 1.7(b)), want je kunt $\Phi' = \{Qv_0, Rv_1\}$ bekijken en dan het lemma toepassen.

Opgave 3

Zij S een symboolverzameling. Bepaal $\mathfrak{J}^{\Phi}$ voor een inconsistente verzameling.

Als Φ inconsistent is, dan geldt $\Phi \vdash \varphi$ voor *alle* formules φ. (Ctr') Hierdoor zijn alle formules van de vorm $t_1 \equiv t_2$ afleidbaar, dus alle termen zijn equivalent.

- De structuur T^{Φ} heeft dus maar één element.
- Het punt heeft alle mogelijke relaties, want we hebben ook $\Phi \vdash Rt \dots t$.
- De functies zijn constant.
- De constantes worden afgebeeld op het punt.
- De bedeling β stuurt alle variabelen naar het enige punt.

Merk op dat $\mathfrak{J}^{\Phi}$ hetzelfde is voor alle inconsistente Φ.

Opgave 4

Zij $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ een S-interpretatie en kies $\Phi = \{\varphi \in L^S \mid \mathfrak{I} \models \varphi\}$. (a) Laat zien dat Φ negatie-compleet is. (b) Neem $A = \{\mathfrak{I}(t) \mid t$ an S-term$\}$. Bewijs dat Φ getuigen bevat en dat $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{I}^\Phi$.

(a) Stel dat $\Phi \not\vdash \varphi$. Dan geldt $\mathfrak{I} \not\models \varphi$ dus $\mathfrak{I} \models \neg\varphi$ waardoor $\Phi \vdash \neg\varphi$. We hebben dus inderdaad $\Phi \vdash \varphi$ of $\Phi \vdash \neg\varphi$.

(b) Stel dat $\Phi \vdash \exists x\varphi$. Omdat $\mathfrak{I} \models \Phi$ geldt dus $\mathfrak{I} \models \exists x\varphi$. Er is dus een $a \in A$ zodat $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$, oftewel er is een term t zodat $\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t)}{x} \models \varphi$. Volgens het substitutielemma geldt $\mathfrak{I} \models \varphi\frac{t}{x}$. Een getuige is dus een t zodat $a = \mathfrak{I}(t)$, want $\varphi\frac{t}{x} \in \Phi$ waardoor het zeker afleidbaar is.
Het kanonieke isomorfisme stuurt $\mathfrak{I}(t) \in A$ naar $\overline{t} \in T^\Phi$. Dit is welgedefinieerd: als $\mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2)$ dan geldt $\mathfrak{I} \models t_1 \equiv t_2$ dus $\Phi \vdash t_1 \equiv t_2$ waardoor $t_1 \equiv t_2$. Ga zelf de andere eisen na.