Wiskunde logica

Werkcollege 8

Jolien Oomens

6 april 2017

Opgave 1

Zij $\Phi = \{v_0 \equiv t \mid t \in T^S\} \cup \{\exists v_0 \exists v_1 \neg v_0 \equiv v_1\}$. Bewijs $\mathrm{Con}\,\Phi$ en dat er geen consistente verzameling in L^S bestaat die Φ omvat en ook getuigen heeft.

Bekijk een structuur bestaande uit twee punten a en b. Kies $\beta(x) = a$ voor alle x. Dan worden alle termen afgebeeld op a, dus $\mathfrak{J} \models \Phi$. Uit $\mathrm{Sat}\,\Phi$ volgt $\mathrm{Con}\,\Phi$.
Stel dat er een Ψ is met $\Phi \subseteq \Psi$ die getuigen bevat. Volgens de volledigheidsstelling is er een model $\mathfrak{J}$ dat Ψ waar maakt. Er zijn ook getuigen $t_1, t_2 \in T^S$ zodat

$$\Psi \vdash (\exists v_0 \exists v_1 \neg v_0 \equiv v_1 \rightarrow \neg t_1 \equiv t_2)$$

dus $\mathfrak{J} \models \neg t_1 \equiv t_2$ maar ook $\mathfrak{J} \models t_1 \equiv t_2$. Tegenspraak. □

Opgave 2

Is $\{\neg \forall v_1 P v_1, P v_1, P v_2, P v_3, \ldots\}$ consistent?

Kies opnieuw β niet surjectief.

Opgave 3

Laat zien dat een oneindige kaart met vier kleuren te kleuren is dan en slechts dan als elke eindige deelkaart met vier kleuren te kleuren is.

Bekijk de taal met de vier unaire relaties $\{G, B, R, O\}$ (groen, blauw, rood, oranje) en introduceer een constante voor elk land op de kaart (bijvoorbeeld $c_{\mathrm{NL}}, c_{\mathrm{EN}}, c_{\mathrm{BE}}$). Zij R de relatie die weergeeft welke landen aan elkaar grenzen. De formule

$$\varphi = \forall x\,((Gx \vee Bx \vee Rx \vee Ox) \wedge \forall y (Rxy \rightarrow ((Gy \rightarrow \neg Gx) \wedge \ldots))$$

beschrijft een correcte kleuring.
De compactheidsstelling (VI.2.1(b)) geeft nu het resultaat. □

Opgave 4

Zij Σ_1 en Σ_2 twee verzamelingen zinnen zodat er geen structuur is die een model is van zowel Σ_1 als Σ_2. Bewijs dat er een zin τ is zodat $\mathrm{Mod}(\Sigma_1) \subseteq \mathrm{Mod}(\tau)$ en $\mathrm{Mod}(\Sigma_2) \subseteq \mathrm{Mod}(\neg\tau)$.

Er geldt niet $\mathrm{Sat}(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ dus er is een eindige deelverzameling zonder model, zeg $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi_m\}$ waarbij elke $\varphi_i \in \Sigma_1$ en elke $\psi_j \in \Sigma_2$. Definieer nu

$$\tau = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n.$$

Elk model voor Σ_1 is zeker een model voor τ. Zij $M \in \mathrm{Mod}(\Sigma_2)$ en stel dat $M \notin \mathrm{Mod}(\neg\tau)$. Dan geldt $M \models \tau$, maar dan moet ook $M \models \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi_m\}$. Tegenspraak. $\square$

Opgave 5

Neem $S = \{P\}$ en zij $\mathfrak{A}$ de structuur met $A = \mathbb{Z}$ en $(a, b) \in P^{\mathfrak{A}}$ precies als $|a - b| = 1$. Bewijs dat er een structuur $\mathfrak{B}$ is die dezelfde S-zinnen waar maakt als $\mathfrak{A}$, maar niet samenhangend is.

Voeg twee constanten c en d toe aan A. Schrijf

$$\varphi_n = \exists x_1 \ldots \exists x_{n-1} \left(Rcx_1 \wedge Rx_1x_2 \wedge \cdots \wedge Rx_{n-1}d \right).$$

We zien dat elke eindige deelverzameling van

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cup \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$$

een model heeft, dus er bestaat een structuur die al deze formules waar maakt (compactheid). $\square$