Wiskunde logica

Werkcollege 9

Jolien Oomens

11 april 2017

Opgave 1

Zij S een symboolverzameling. (a) Bewijs dat de verzameling van alle eindige S-structuren niet Δ-elementair is. (b) Bewijs dat de verzameling van alle oneindige S-structuren Δ-elementair is maar niet elementair.

Opgave 1

Zij S een symboolverzameling. (a) Bewijs dat de verzameling van alle eindige S-structuren niet Δ-elementair is. (b) Bewijs dat de verzameling van alle oneindige S-structuren Δ-elementair is maar niet elementair.

Zij φ_n de formule die aangeeft dat $|A| \geq n$.

Opgave 1

Zij S een symboolverzameling. (a) Bewijs dat de verzameling van alle eindige S-structuren niet Δ-elementair is. (b) Bewijs dat de verzameling van alle oneindige S-structuren Δ-elementair is maar niet elementair.

Zij φ_n de formule die aangeeft dat $|A| \geq n$.

(a) Stel van wel, dan is er een Φ zodat

$$\mathrm{Mod}(\Phi) = \{\mathfrak{A} : |A| < \infty\}.$$

Opgave 1

Zij S een symboolverzameling. (a) Bewijs dat de verzameling van alle eindige S-structuren niet Δ-elementair is. (b) Bewijs dat de verzameling van alle oneindige S-structuren Δ-elementair is maar niet elementair.

Zij φ_n de formule die aangeeft dat $|A| \geq n$.

(a) Stel van wel, dan is er een Φ zodat

$$\mathrm{Mod}(\Phi) = \{\mathfrak{A} : |A| < \infty\}.$$

Bekijk nu $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n \cup \Phi$.

Opgave 1

Zij S een symboolverzameling. (a) Bewijs dat de verzameling van alle eindige S-structuren niet Δ-elementair is. (b) Bewijs dat de verzameling van alle oneindige S-structuren Δ-elementair is maar niet elementair.

Zij φ_n de formule die aangeeft dat $|A| \geq n$.

(a) Stel van wel, dan is er een Φ zodat

$$\mathrm{Mod}(\Phi) = \{\mathfrak{A} : |A| < \infty\}.$$

Bekijk nu $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n \cup \Phi$. Elke eindige deelverzameling heeft een model, dus volgens de compactheidsstelling heeft deze verzameling een model.

Opgave 1

Zij S een symboolverzameling. (a) Bewijs dat de verzameling van alle eindige S-structuren niet Δ-elementair is. (b) Bewijs dat de verzameling van alle oneindige S-structuren Δ-elementair is maar niet elementair.

Zij φ_n de formule die aangeeft dat $|A| \geq n$.

(a) Stel van wel, dan is er een Φ zodat

$$\mathrm{Mod}(\Phi) = \{\mathfrak{A} : |A| < \infty\}.$$

Bekijk nu $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n \cup \Phi$. Elke eindige deelverzameling heeft een model, dus volgens de compactheidsstelling heeft deze verzameling een model. Er is dus een oneindige structuur die Φ waarmaakt.

Opgave 1

Zij S een symboolverzameling. (a) Bewijs dat de verzameling van alle eindige S-structuren niet Δ-elementair is. (b) Bewijs dat de verzameling van alle oneindige S-structuren Δ-elementair is maar niet elementair.

Zij φ_n de formule die aangeeft dat $|A| \geq n$.

(a) Stel van wel, dan is er een Φ zodat

$$\mathrm{Mod}(\Phi) = \{\mathfrak{A} : |A| < \infty\}.$$

Bekijk nu $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n \cup \Phi$. Elke eindige deelverzameling heeft een model, dus volgens de compactheidsstelling heeft deze verzameling een model. Er is dus een oneindige structuur die Φ waarmaakt. Tegenspraak.

Opgave 1

Zij S een symboolverzameling. (a) Bewijs dat de verzameling van alle eindige S-structuren niet Δ-elementair is. (b) Bewijs dat de verzameling van alle oneindige S-structuren Δ-elementair is maar niet elementair.

Zij φ_n de formule die aangeeft dat $|A| \geq n$.

(a) Stel van wel, dan is er een Φ zodat

$$\mathrm{Mod}(\Phi) = \{\mathfrak{A} : |A| < \infty\}.$$

Bekijk nu $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n \cup \Phi$. Elke eindige deelverzameling heeft een model, dus volgens de compactheidsstelling heeft deze verzameling een model. Er is dus een oneindige structuur die Φ waarmaakt. Tegenspraak. $\square$

Opgave 1

Zij S een symboolverzameling. (a) Bewijs dat de verzameling van alle eindige S-structuren niet Δ-elementair is. (b) Bewijs dat de verzameling van alle oneindige S-structuren Δ-elementair is maar niet elementair.

Zij φ_n de formule die aangeeft dat $|A| \geq n$.

(a) Stel van wel, dan is er een Φ zodat

$$\text{Mod}(\Phi) = \{\mathfrak{A} : |A| < \infty\}.$$

Bekijk nu $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n \cup \Phi$. Elke eindige deelverzameling heeft een model, dus volgens de compactheidsstelling heeft deze verzameling een model. Er is dus een oneindige structuur die Φ waarmaakt. Tegenspraak. $\square$

(b) Er geldt $\text{Mod}(\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}) = \{\mathfrak{A} : |A| = \infty\}$.

Opgave 1

Zij S een symboolverzameling. (a) Bewijs dat de verzameling van alle eindige S-structuren niet Δ-elementair is. (b) Bewijs dat de verzameling van alle oneindige S-structuren Δ-elementair is maar niet elementair.

Zij φ_n de formule die aangeeft dat $|A| \geq n$.

(a) Stel van wel, dan is er een Φ zodat

$$\mathrm{Mod}(\Phi) = \{\mathfrak{A} : |A| < \infty\}.$$

Bekijk nu $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n \cup \Phi$. Elke eindige deelverzameling heeft een model, dus volgens de compactheidsstelling heeft deze verzameling een model. Er is dus een oneindige structuur die Φ waarmaakt. Tegenspraak. $\square$

(b) Er geldt $\mathrm{Mod}(\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}) = \{\mathfrak{A} : |A| = \infty\}$. Stel dat de verzameling elementair is.

Opgave 1

Zij S een symboolverzameling. (a) Bewijs dat de verzameling van alle eindige S-structuren niet Δ-elementair is. (b) Bewijs dat de verzameling van alle oneindige S-structuren Δ-elementair is maar niet elementair.

Zij φ_n de formule die aangeeft dat $|A| \geq n$.

(a) Stel van wel, dan is er een Φ zodat

$$\mathrm{Mod}(\Phi) = \{\mathfrak{A} : |A| < \infty\}.$$

Bekijk nu $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n \cup \Phi$. Elke eindige deelverzameling heeft een model, dus volgens de compactheidsstelling heeft deze verzameling een model. Er is dus een oneindige structuur die Φ waarmaakt. Tegenspraak. $\square$

(b) Er geldt $\mathrm{Mod}(\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}) = \{\mathfrak{A} : |A| = \infty\}$. Stel dat de verzameling elementair is. Dan is er een φ zodat

$$\mathrm{Mod}(\{\varphi\}) = \{\mathfrak{A} : |A| = \infty\},$$

Opgave 1

Zij S een symboolverzameling. (a) Bewijs dat de verzameling van alle eindige S-structuren niet Δ-elementair is. (b) Bewijs dat de verzameling van alle oneindige S-structuren Δ-elementair is maar niet elementair.

Zij φ_n de formule die aangeeft dat $|A| \geq n$.

(a) Stel van wel, dan is er een Φ zodat

$$\mathrm{Mod}(\Phi) = \{\mathfrak{A} : |A| < \infty\}.$$

Bekijk nu $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n \cup \Phi$. Elke eindige deelverzameling heeft een model, dus volgens de compactheidsstelling heeft deze verzameling een model. Er is dus een oneindige structuur die Φ waarmaakt. Tegenspraak. $\square$

(b) Er geldt $\mathrm{Mod}(\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}) = \{\mathfrak{A} : |A| = \infty\}$. Stel dat de verzameling elementair is. Dan is er een φ zodat

$$\mathrm{Mod}(\{\varphi\}) = \{\mathfrak{A} : |A| = \infty\},$$

maar dan geldt $\mathrm{Mod}(\{\neg\varphi\}) = \{\mathfrak{A} : |A| < \infty\}$.

Opgave 1

Zij S een symboolverzameling. (a) Bewijs dat de verzameling van alle eindige S-structuren niet Δ-elementair is. (b) Bewijs dat de verzameling van alle oneindige S-structuren Δ-elementair is maar niet elementair.

Zij φ_n de formule die aangeeft dat $|A| \geq n$.

(a) Stel van wel, dan is er een Φ zodat

$$\text{Mod}(\Phi) = \{\mathfrak{A} : |A| < \infty\}.$$

Bekijk nu $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n \cup \Phi$. Elke eindige deelverzameling heeft een model, dus volgens de compactheidsstelling heeft deze verzameling een model. Er is dus een oneindige structuur die Φ waarmaakt. Tegenspraak. $\square$

(b) Er geldt $\text{Mod}(\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}) = \{\mathfrak{A} : |A| = \infty\}$. Stel dat de verzameling elementair is. Dan is er een φ zodat

$$\text{Mod}(\{\varphi\}) = \{\mathfrak{A} : |A| = \infty\},$$

maar dan geldt $\text{Mod}(\{\neg\varphi\}) = \{\mathfrak{A} : |A| < \infty\}$.
Tegenspraak.

Opgave 1

Zij S een symboolverzameling. (a) Bewijs dat de verzameling van alle eindige S-structuren niet Δ-elementair is. (b) Bewijs dat de verzameling van alle oneindige S-structuren Δ-elementair is maar niet elementair.

Zij φ_n de formule die aangeeft dat $|A| \geq n$.

(a) Stel van wel, dan is er een Φ zodat

$$\mathrm{Mod}(\Phi) = \{\mathfrak{A} : |A| < \infty\}.$$

Bekijk nu $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n \cup \Phi$. Elke eindige deelverzameling heeft een model, dus volgens de compactheidsstelling heeft deze verzameling een model. Er is dus een oneindige structuur die Φ waarmaakt. Tegenspraak. $\square$

(b) Er geldt $\mathrm{Mod}(\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}) = \{\mathfrak{A} : |A| = \infty\}$. Stel dat de verzameling elementair is. Dan is er een φ zodat

$$\mathrm{Mod}(\{\varphi\}) = \{\mathfrak{A} : |A| = \infty\},$$

maar dan geldt $\mathrm{Mod}(\{\neg\varphi\}) = \{\mathfrak{A} : |A| < \infty\}$. Tegenspraak. $\square$

Opgave 2

Zij $\mathfrak{K}$ een Δ-elementaire klasse van structuren. Laat zien dat de klasse $\mathfrak{K}^\infty$ van structuren in $\mathfrak{K}$ met een oneindig domein ook Δ-elementair is.

Opgave 2

Zij $\mathfrak{K}$ een Δ-elementaire klasse van structuren. Laat zien dat de klasse $\mathfrak{K}^\infty$ van structuren in $\mathfrak{K}$ met een oneindig domein ook Δ-elementair is.

We weten dat er een Φ is zodat

$$\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}(\Phi).$$

Opgave 2

Zij $\mathfrak{K}$ een Δ-elementaire klasse van structuren. Laat zien dat de klasse $\mathfrak{K}^\infty$ van structuren in $\mathfrak{K}$ met een oneindig domein ook Δ-elementair is.

We weten dat er een Φ is zodat

$$\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}(\Phi).$$

Neem nu φ_n opnieuw de formule die zegt dat een structuur n of meer punten heeft.

Opgave 2

Zij $\mathfrak{K}$ een Δ-elementaire klasse van structuren. Laat zien dat de klasse $\mathfrak{K}^\infty$ van structuren in $\mathfrak{K}$ met een oneindig domein ook Δ-elementair is.

We weten dat er een Φ is zodat

$$\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}(\Phi).$$

Neem nu φ_n opnieuw de formule die zegt dat een structuur n of meer punten heeft. Dan hebben we

$$\mathfrak{K}^\infty = \mathrm{Mod}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n \cup \Phi\right),$$

Opgave 2

Zij $\mathfrak{K}$ een Δ-elementaire klasse van structuren. Laat zien dat de klasse $\mathfrak{K}^\infty$ van structuren in $\mathfrak{K}$ met een oneindig domein ook Δ-elementair is.

We weten dat er een Φ is zodat

$$\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}(\Phi).$$

Neem nu φ_n opnieuw de formule die zegt dat een structuur n of meer punten heeft. Dan hebben we

$$\mathfrak{K}^\infty = \mathrm{Mod}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n \cup \Phi\right),$$

dus $\mathfrak{K}^\infty$ is Δ-elementair.

Opgave 2

Zij $\mathfrak{K}$ een Δ-elementaire klasse van structuren. Laat zien dat de klasse $\mathfrak{K}^\infty$ van structuren in $\mathfrak{K}$ met een oneindig domein ook Δ-elementair is.

We weten dat er een Φ is zodat

$$\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}(\Phi).$$

Neem nu φ_n opnieuw de formule die zegt dat een structuur n of meer punten heeft. Dan hebben we

$$\mathfrak{K}^\infty = \mathrm{Mod}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n \cup \Phi\right),$$

dus $\mathfrak{K}^\infty$ is Δ-elementair. $\square$

Opgave 3

Bewijs met Zorns lemma dat elk ideaal ongelijk aan $\mathcal{R}$ bevat is in een maximaal ideaal.

Opgave 3

Bewijs met Zorns lemma dat elk ideaal ongelijk aan $\mathcal{R}$ bevat is in een maximaal ideaal.

Zij $I \subsetneq \mathcal{R}$ een ideaal.

Opgave 3

Bewijs met Zorns lemma dat elk ideaal ongelijk aan $\mathcal{R}$ bevat is in een maximaal ideaal.

Zij $I \subsetneq \mathcal{R}$ een ideaal. We bekijken de poset

$$V = \{I \subseteq J \subsetneq \mathcal{R} : J \text{ een ideaal}\}.$$

Opgave 3

Bewijs met Zorns lemma dat elk ideaal ongelijk aan $\mathcal{R}$ bevat is in een maximaal ideaal.

Zij $I \subsetneq \mathcal{R}$ een ideaal. We bekijken de poset

$$V = \{I \subseteq J \subsetneq \mathcal{R} : J \text{ een ideaal}\}.$$

Zij $K \subseteq V$ een ketting.

Opgave 3

Bewijs met Zorns lemma dat elk ideaal ongelijk aan $\mathcal{R}$ bevat is in een maximaal ideaal.

Zij $I \subsetneq \mathcal{R}$ een ideaal. We bekijken de poset

$$V = \{I \subseteq J \subsetneq \mathcal{R} : J \text{ een ideaal}\}.$$

Zij $K \subseteq V$ een ketting. Dan is de vereniging $B = \bigcup_{J \in K} J$ opnieuw een ideaal:

Opgave 3

Bewijs met Zorns lemma dat elk ideaal ongelijk aan $\mathcal{R}$ bevat is in een maximaal ideaal.

Zij $I \subsetneq \mathcal{R}$ een ideaal. We bekijken de poset

$$V = \{I \subseteq J \subsetneq \mathcal{R} : J \text{ een ideaal}\}.$$

Zij $K \subseteq V$ een ketting. Dan is de vereniging $B = \bigcup_{J \in K} J$ opnieuw een ideaal:

1. $B \supseteq I \neq \emptyset$

Opgave 3

Bewijs met Zorns lemma dat elk ideaal ongelijk aan $\mathcal{R}$ bevat is in een maximaal ideaal.

Zij $I \subsetneq \mathcal{R}$ een ideaal. We bekijken de poset

$$V = \{I \subseteq J \subsetneq \mathcal{R} : J \text{ een ideaal}\}.$$

Zij $K \subseteq V$ een ketting. Dan is de vereniging $B = \bigcup_{J \in K} J$ opnieuw een ideaal:

1. $B \supseteq I \neq \emptyset$
2. B is gesloten onder optelling.

Opgave 3

Bewijs met Zorns lemma dat elk ideaal ongelijk aan $\mathcal{R}$ bevat is in een maximaal ideaal.

Zij $I \subsetneq \mathcal{R}$ een ideaal. We bekijken de poset

$$V = \{I \subseteq J \subsetneq \mathcal{R} : J \text{ een ideaal}\}.$$

Zij $K \subseteq V$ een ketting. Dan is de vereniging $B = \bigcup_{J \in K} J$ opnieuw een ideaal:

1. $B \supseteq I \neq \emptyset$
2. B is gesloten onder optelling.
3. Voor $b \in B$ en $r \in \mathcal{R}$ is er een $J \in K$ zodat $b \in J$ en omdat dit een ideaal is geldt ook $a \cdot r \in J \subseteq B$ en $r \cdot a \in J \subseteq B$.

Opgave 3

Bewijs met Zorns lemma dat elk ideaal ongelijk aan $\mathcal{R}$ bevat is in een maximaal ideaal.

Zij $I \subsetneq \mathcal{R}$ een ideaal. We bekijken de poset

$$V = \{I \subseteq J \subsetneq \mathcal{R} : J \text{ een ideaal}\}.$$

Zij $K \subseteq V$ een ketting. Dan is de vereniging $B = \bigcup_{J \in K} J$ opnieuw een ideaal:

1. $B \supseteq I \neq \emptyset$
2. B is gesloten onder optelling.
3. Voor $b \in B$ en $r \in \mathcal{R}$ is er een $J \in K$ zodat $b \in J$ en omdat dit een ideaal is geldt ook $a \cdot r \in J \subseteq B$ en $r \cdot a \in J \subseteq B$.

Merk op dat $1 \notin J$ voor alle $J \in K$,

Opgave 3

Bewijs met Zorns lemma dat elk ideaal ongelijk aan $\mathcal{R}$ bevat is in een maximaal ideaal.

Zij $I \subsetneq \mathcal{R}$ een ideaal. We bekijken de poset

$$V = \{I \subseteq J \subsetneq \mathcal{R} : J \text{ een ideaal}\}.$$

Zij $K \subseteq V$ een ketting. Dan is de vereniging $B = \bigcup_{J \in K} J$ opnieuw een ideaal:

1. $B \supseteq I \neq \emptyset$
2. B is gesloten onder optelling.
3. Voor $b \in B$ en $r \in \mathcal{R}$ is er een $J \in K$ zodat $b \in J$ en omdat dit een ideaal is geldt ook $a \cdot r \in J \subseteq B$ en $r \cdot a \in J \subseteq B$.

Merk op dat $1 \notin J$ voor alle $J \in K$, dus ook $1 \notin B$ waardoor B niet de hele ring is.

Opgave 3

Bewijs met Zorns lemma dat elk ideaal ongelijk aan $\mathcal{R}$ bevat is in een maximaal ideaal.

Zij $I \subsetneq \mathcal{R}$ een ideaal. We bekijken de poset

$$V = \{I \subseteq J \subsetneq \mathcal{R} : J \text{ een ideaal}\}.$$

Zij $K \subseteq V$ een ketting. Dan is de vereniging $B = \bigcup_{J \in K} J$ opnieuw een ideaal:

1. $B \supseteq I \neq \emptyset$
2. B is gesloten onder optelling.
3. Voor $b \in B$ en $r \in \mathcal{R}$ is er een $J \in K$ zodat $b \in J$ en omdat dit een ideaal is geldt ook $a \cdot r \in J \subseteq B$ en $r \cdot a \in J \subseteq B$.

Merk op dat $1 \notin J$ voor alle $J \in K$, dus ook $1 \notin B$ waardoor B niet de hele ring is. We zien dat $B \in V$ een bovengrens is.

Opgave 3

Bewijs met Zorns lemma dat elk ideaal ongelijk aan $\mathcal{R}$ bevat is in een maximaal ideaal.

Zij $I \subsetneq \mathcal{R}$ een ideaal. We bekijken de poset

$$V = \{I \subseteq J \subsetneq \mathcal{R} : J \text{ een ideaal}\}.$$

Zij $K \subseteq V$ een ketting. Dan is de vereniging $B = \bigcup_{J \in K} J$ opnieuw een ideaal:

1. $B \supseteq I \neq \emptyset$
2. B is gesloten onder optelling.
3. Voor $b \in B$ en $r \in \mathcal{R}$ is er een $J \in K$ zodat $b \in J$ en omdat dit een ideaal is geldt ook $a \cdot r \in J \subseteq B$ en $r \cdot a \in J \subseteq B$.

Merk op dat $1 \notin J$ voor alle $J \in K$, dus ook $1 \notin B$ waardoor B niet de hele ring is. We zien dat $B \in V$ een bovengrens is. Er is dus een maximaal element $M \in V$.

Opgave 3

Bewijs met Zorns lemma dat elk ideaal ongelijk aan $\mathcal{R}$ bevat is in een maximaal ideaal.

Zij $I \subsetneq \mathcal{R}$ een ideaal. We bekijken de poset

$$V = \{I \subseteq J \subsetneq \mathcal{R} : J \text{ een ideaal}\}.$$

Zij $K \subseteq V$ een ketting. Dan is de vereniging $B = \bigcup_{J \in K} J$ opnieuw een ideaal:

1. $B \supseteq I \neq \emptyset$
2. B is gesloten onder optelling.
3. Voor $b \in B$ en $r \in \mathcal{R}$ is er een $J \in K$ zodat $b \in J$ en omdat dit een ideaal is geldt ook $a \cdot r \in J \subseteq B$ en $r \cdot a \in J \subseteq B$.

Merk op dat $1 \notin J$ voor alle $J \in K$, dus ook $1 \notin B$ waardoor B niet de hele ring is. We zien dat $B \in V$ een bovengrens is. Er is dus een maximaal element $M \in V$. Dit is een maximaal ideaal omdat $M \neq \mathcal{R}$.

Opgave 3

Bewijs met Zorns lemma dat elk ideaal ongelijk aan $\mathcal{R}$ bevat is in een maximaal ideaal.

Zij $I \subsetneq \mathcal{R}$ een ideaal. We bekijken de poset

$$V = \{I \subseteq J \subsetneq \mathcal{R} : J \text{ een ideaal}\}.$$

Zij $K \subseteq V$ een ketting. Dan is de vereniging $B = \bigcup_{J \in K} J$ opnieuw een ideaal:

1. $B \supseteq I \neq \emptyset$
2. B is gesloten onder optelling.
3. Voor $b \in B$ en $r \in \mathcal{R}$ is er een $J \in K$ zodat $b \in J$ en omdat dit een ideaal is geldt ook $a \cdot r \in J \subseteq B$ en $r \cdot a \in J \subseteq B$.

Merk op dat $1 \notin J$ voor alle $J \in K$, dus ook $1 \notin B$ waardoor B niet de hele ring is. We zien dat $B \in V$ een bovengrens is. Er is dus een maximaal element $M \in V$. Dit is een maximaal ideaal omdat $M \neq \mathcal{R}$. $\square$

Opgave 4

Voor elke vervulbare verzameling Φ van S-zinnen zij $\mathfrak{A}_S$ een S-structuur zodat $\mathfrak{A}_\Phi \models \Phi$. Definieer $\Sigma = \{\mathfrak{A}_\Phi : \Phi \subseteq L_0^S \text{ zodat } \mathrm{Sat}(\Phi)\}$ en $X_\varphi = \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

Opgave 4

Voor elke vervulbare verzameling Φ van S-zinnen zij $\mathfrak{A}_S$ een S-structuur zodat $\mathfrak{A}_\Phi \models \Phi$. Definieer $\Sigma = \{\mathfrak{A}_\Phi : \Phi \subseteq L_0^S \text{ zodat } \mathrm{Sat}(\Phi)\}$ en $X_\varphi = \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

(a) We hebben

$$\begin{aligned} X_{\varphi \wedge \psi} &= \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi \wedge \psi\} \\ &= \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi \text{ en } \mathfrak{A} \models \psi\} \\ &= \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi\} \cap \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \psi\} \\ &= X_\varphi \cap X_\psi. \end{aligned}$$

Opgave 4

Voor elke vervulbare verzameling Φ van S-zinnen zij $\mathfrak{A}_S$ een S-structuur zodat $\mathfrak{A}_\Phi \models \Phi$. Definieer $\Sigma = \{\mathfrak{A}_\Phi : \Phi \subseteq L_0^S \text{ zodat } \mathrm{Sat}(\Phi)\}$ en $X_\varphi = \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

(a) We hebben

$$\begin{aligned} X_{\varphi\wedge\psi} &= \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi \wedge \psi\} \\ &= \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi \text{ en } \mathfrak{A} \models \psi\} \\ &= \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi\} \cap \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \psi\} \\ &= X_\varphi \cap X_\psi. \end{aligned}$$

(b) Er geldt

$$\begin{aligned} X_{\neg\varphi} &= \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \neg\varphi\} \\ &= \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \not\models \varphi\} \\ &= \Sigma \setminus \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi\} \\ &= \Sigma \setminus X_\varphi. \end{aligned}$$

Opgave 4

Voor elke vervulbare verzameling Φ van S-zinnen zij $\mathfrak{A}_S$ een S-structuur zodat $\mathfrak{A}_\Phi \models \Phi$. Definieer $\Sigma = \{\mathfrak{A}_\Phi : \Phi \subseteq L_0^S \text{ zodat } \mathrm{Sat}(\Phi)\}$ en $X_\varphi = \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

Opgave 4

Voor elke vervulbare verzameling Φ van S-zinnen zij $\mathfrak{A}_S$ een S-structuur zodat $\mathfrak{A}_\Phi \models \Phi$. Definieer $\Sigma = \{\mathfrak{A}_\Phi : \Phi \subseteq L_0^S \text{ zodat } \mathrm{Sat}(\Phi)\}$ en $X_\varphi = \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

(c) Stel dat $\Sigma = \bigcup_{\varphi \in \Phi} X_\varphi$.

Opgave 4

Voor elke vervulbare verzameling Φ van S-zinnen zij $\mathfrak{A}_S$ een S-structuur zodat $\mathfrak{A}_\Phi \models \Phi$. Definieer $\Sigma = \{\mathfrak{A}_\Phi : \Phi \subseteq L_0^S \text{ zodat } \mathrm{Sat}(\Phi)\}$ en $X_\varphi = \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

(c) Stel dat $\Sigma = \bigcup_{\varphi \in \Phi} X_\varphi$. Definieer $\Psi = \{\neg\varphi : \varphi \in \Phi\}$.

Opgave 4

Voor elke vervulbare verzameling Φ van S-zinnen zij $\mathfrak{A}_S$ een S-structuur zodat $\mathfrak{A}_\Phi \models \Phi$. Definieer $\Sigma = \{\mathfrak{A}_\Phi : \Phi \subseteq L_0^S \text{ zodat } \mathrm{Sat}(\Phi)\}$ en $X_\varphi = \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

(c) Stel dat $\Sigma = \bigcup_{\varphi \in \Phi} X_\varphi$. Definieer $\Psi = \{\neg\varphi : \varphi \in \Phi\}$. Ik claim dat Ψ dan niet vervulbaar is.

Opgave 4

Voor elke vervulbare verzameling Φ van S-zinnen zij $\mathfrak{A}_S$ een S-structuur zodat $\mathfrak{A}_\Phi \models \Phi$. Definieer $\Sigma = \{\mathfrak{A}_\Phi : \Phi \subseteq L_0^S \text{ zodat } \mathrm{Sat}(\Phi)\}$ en $X_\varphi = \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

(c) Stel dat $\Sigma = \bigcup_{\varphi \in \Phi} X_\varphi$. Definieer $\Psi = \{\neg\varphi : \varphi \in \Phi\}$. Ik claim dat Ψ dan niet vervulbaar is. Stel dat wel $\mathrm{Sat}(\Psi)$ geldt.

Opgave 4

Voor elke vervulbare verzameling Φ van S-zinnen zij $\mathfrak{A}_S$ een S-structuur zodat $\mathfrak{A}_\Phi \models \Phi$. Definieer $\Sigma = \{\mathfrak{A}_\Phi : \Phi \subseteq L_0^S \text{ zodat } \mathrm{Sat}(\Phi)\}$ en $X_\varphi = \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

(c) Stel dat $\Sigma = \bigcup_{\varphi \in \Phi} X_\varphi$. Definieer $\Psi = \{\neg\varphi : \varphi \in \Phi\}$. Ik claim dat Ψ dan niet vervulbaar is. Stel dat wel $\mathrm{Sat}(\Psi)$ geldt. Dan is er een $\mathfrak{A}_\Psi \in \Sigma$ zodat $\mathfrak{A}_\Psi \models \Psi$,

Opgave 4

Voor elke vervulbare verzameling Φ van S-zinnen zij $\mathfrak{A}_S$ een S-structuur zodat $\mathfrak{A}_\Phi \models \Phi$. Definieer $\Sigma = \{\mathfrak{A}_\Phi : \Phi \subseteq L_0^S \text{ zodat } \mathrm{Sat}(\Phi)\}$ en $X_\varphi = \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

(c) Stel dat $\Sigma = \bigcup_{\varphi \in \Phi} X_\varphi$. Definieer $\Psi = \{\neg\varphi : \varphi \in \Phi\}$. Ik claim dat Ψ dan niet vervulbaar is. Stel dat wel $\mathrm{Sat}(\Psi)$ geldt. Dan is er een $\mathfrak{A}_\Psi \in \Sigma$ zodat $\mathfrak{A}_\Psi \models \Psi$, maar dan geldt $\mathfrak{A}_\Psi \not\models \varphi$ voor alle $\varphi \in \Phi$.

Opgave 4

Voor elke vervulbare verzameling Φ van S-zinnen zij $\mathfrak{A}_S$ een S-structuur zodat $\mathfrak{A}_\Phi \models \Phi$. Definieer $\Sigma = \{\mathfrak{A}_\Phi : \Phi \subseteq L_0^S \text{ zodat } \mathrm{Sat}(\Phi)\}$ en $X_\varphi = \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

(c) Stel dat $\Sigma = \bigcup_{\varphi \in \Phi} X_\varphi$. Definieer $\Psi = \{\neg\varphi : \varphi \in \Phi\}$. Ik claim dat Ψ dan niet vervulbaar is. Stel dat wel $\mathrm{Sat}(\Psi)$ geldt. Dan is er een $\mathfrak{A}_\Psi \in \Sigma$ zodat $\mathfrak{A}_\Psi \models \Psi$, maar dan geldt $\mathfrak{A}_\Psi \not\models \varphi$ voor alle $\varphi \in \Phi$. De structuur $\mathfrak{A}_\Psi$ kan dus in geen enkele X_φ zitten.

Opgave 4

Voor elke vervulbare verzameling Φ van S-zinnen zij $\mathfrak{A}_S$ een S-structuur zodat $\mathfrak{A}_\Phi \models \Phi$. Definieer $\Sigma = \{\mathfrak{A}_\Phi : \Phi \subseteq L_0^S \text{ zodat } \mathrm{Sat}(\Phi)\}$ en $X_\varphi = \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

(c) Stel dat $\Sigma = \bigcup_{\varphi \in \Phi} X_\varphi$. Definieer $\Psi = \{\neg\varphi : \varphi \in \Phi\}$. Ik claim dat Ψ dan niet vervulbaar is. Stel dat wel $\mathrm{Sat}(\Psi)$ geldt. Dan is er een $\mathfrak{A}_\Psi \in \Sigma$ zodat $\mathfrak{A}_\Psi \models \Psi$, maar dan geldt $\mathfrak{A}_\Psi \not\models \varphi$ voor alle $\varphi \in \Phi$. De structuur $\mathfrak{A}_\Psi$ kan dus in geen enkele X_φ zitten. Dit is strijdig met $\Sigma = \bigcup_{\varphi \in \Phi} X_\varphi$.

Opgave 4

Voor elke vervulbare verzameling Φ van S-zinnen zij $\mathfrak{A}_S$ een S-structuur zodat $\mathfrak{A}_\Phi \models \Phi$. Definieer $\Sigma = \{\mathfrak{A}_\Phi : \Phi \subseteq L_0^S \text{ zodat } \mathrm{Sat}(\Phi)\}$ en $X_\varphi = \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

(c) Stel dat $\Sigma = \bigcup_{\varphi \in \Phi} X_\varphi$. Definieer $\Psi = \{\neg\varphi : \varphi \in \Phi\}$. Ik claim dat Ψ dan niet vervulbaar is. Stel dat wel $\mathrm{Sat}(\Psi)$ geldt. Dan is er een $\mathfrak{A}_\Psi \in \Sigma$ zodat $\mathfrak{A}_\Psi \models \Psi$, maar dan geldt $\mathfrak{A}_\Psi \not\models \varphi$ voor alle $\varphi \in \Phi$. De structuur $\mathfrak{A}_\Psi$ kan dus in geen enkele X_φ zitten. Dit is strijdig met $\Sigma = \bigcup_{\varphi \in \Phi} X_\varphi$.
De verzameling Ψ heeft geen model dus volgens de compactheidsstelling is er een eindige $\Psi_0 \subseteq \Psi$ die ook onvervulbaar is.

Opgave 4

Voor elke vervulbare verzameling Φ van S-zinnen zij $\mathfrak{A}_S$ een S-structuur zodat $\mathfrak{A}_\Phi \models \Phi$. Definieer $\Sigma = \{\mathfrak{A}_\Phi : \Phi \subseteq L_0^S \text{ zodat } \mathrm{Sat}(\Phi)\}$ en $X_\varphi = \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

(c) Stel dat $\Sigma = \bigcup_{\varphi \in \Phi} X_\varphi$. Definieer $\Psi = \{\neg\varphi : \varphi \in \Phi\}$. Ik claim dat Ψ dan niet vervulbaar is. Stel dat wel $\mathrm{Sat}(\Psi)$ geldt. Dan is er een $\mathfrak{A}_\Psi \in \Sigma$ zodat $\mathfrak{A}_\Psi \models \Psi$, maar dan geldt $\mathfrak{A}_\Psi \not\models \varphi$ voor alle $\varphi \in \Phi$. De structuur $\mathfrak{A}_\Psi$ kan dus in geen enkele X_φ zitten. Dit is strijdig met $\Sigma = \bigcup_{\varphi \in \Phi} X_\varphi$.
De verzameling Ψ heeft geen model dus volgens de compactheidsstelling is er een eindige $\Psi_0 \subseteq \Psi$ die ook onvervulbaar is. Noem de bijbehorende indexverzameling Φ_0.

Opgave 4

Voor elke vervulbare verzameling Φ van S-zinnen zij $\mathfrak{A}_S$ een S-structuur zodat $\mathfrak{A}_\Phi \models \Phi$. Definieer $\Sigma = \{\mathfrak{A}_\Phi : \Phi \subseteq L_0^S \text{ zodat } \mathrm{Sat}(\Phi)\}$ en $X_\varphi = \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

(c) Stel dat $\Sigma = \bigcup_{\varphi\in\Phi} X_\varphi$. Definieer $\Psi = \{\neg\varphi : \varphi \in \Phi\}$. Ik claim dat Ψ dan niet vervulbaar is. Stel dat wel $\mathrm{Sat}(\Psi)$ geldt. Dan is er een $\mathfrak{A}_\Psi \in \Sigma$ zodat $\mathfrak{A}_\Psi \models \Psi$, maar dan geldt $\mathfrak{A}_\Psi \not\models \varphi$ voor alle $\varphi \in \Phi$. De structuur $\mathfrak{A}_\Psi$ kan dus in geen enkele X_φ zitten. Dit is strijdig met $\Sigma = \bigcup_{\varphi\in\Phi} X_\varphi$. De verzameling Ψ heeft geen model dus volgens de compactheidsstelling is er een eindige $\Psi_0 \subseteq \Psi$ die ook onvervulbaar is. Noem de bijbehorende indexverzameling Φ_0. Stel dat

$$\Sigma \neq \bigcup_{\varphi\in\Phi_0} X_\varphi.$$

Opgave 4

Voor elke vervulbare verzameling Φ van S-zinnen zij $\mathfrak{A}_S$ een S-structuur zodat $\mathfrak{A}_\Phi \models \Phi$. Definieer $\Sigma = \{\mathfrak{A}_\Phi : \Phi \subseteq L_0^S \text{ zodat } \mathrm{Sat}(\Phi)\}$ en $X_\varphi = \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

(c) Stel dat $\Sigma = \bigcup_{\varphi \in \Phi} X_\varphi$. Definieer $\Psi = \{\neg\varphi : \varphi \in \Phi\}$. Ik claim dat Ψ dan niet vervulbaar is. Stel dat wel $\mathrm{Sat}(\Psi)$ geldt. Dan is er een $\mathfrak{A}_\Psi \in \Sigma$ zodat $\mathfrak{A}_\Psi \models \Psi$, maar dan geldt $\mathfrak{A}_\Psi \not\models \varphi$ voor alle $\varphi \in \Phi$. De structuur $\mathfrak{A}_\Psi$ kan dus in geen enkele X_φ zitten. Dit is strijdig met $\Sigma = \bigcup_{\varphi \in \Phi} X_\varphi$.
De verzameling Ψ heeft geen model dus volgens de compactheidsstelling is er een eindige $\Psi_0 \subseteq \Psi$ die ook onvervulbaar is. Noem de bijbehorende indexverzameling Φ_0.
Stel dat

$$\Sigma \neq \bigcup_{\varphi \in \Phi_0} X_\varphi.$$

Dan is er een $\mathfrak{A}_\chi$ zodat $\mathfrak{A} \not\models \varphi$ voor alle $\varphi \in \Phi_0$.

Opgave 4

Voor elke vervulbare verzameling Φ van S-zinnen zij $\mathfrak{A}_S$ een S-structuur zodat $\mathfrak{A}_\Phi \models \Phi$. Definieer $\Sigma = \{\mathfrak{A}_\Phi : \Phi \subseteq L_0^S \text{ zodat } \mathrm{Sat}(\Phi)\}$ en $X_\varphi = \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

(c) Stel dat $\Sigma = \bigcup_{\varphi \in \Phi} X_\varphi$. Definieer $\Psi = \{\neg\varphi : \varphi \in \Phi\}$. Ik claim dat Ψ dan niet vervulbaar is. Stel dat wel $\mathrm{Sat}(\Psi)$ geldt. Dan is er een $\mathfrak{A}_\Psi \in \Sigma$ zodat $\mathfrak{A}_\Psi \models \Psi$, maar dan geldt $\mathfrak{A}_\Psi \not\models \varphi$ voor alle $\varphi \in \Phi$. De structuur $\mathfrak{A}_\Psi$ kan dus in geen enkele X_φ zitten. Dit is strijdig met $\Sigma = \bigcup_{\varphi \in \Phi} X_\varphi$.
De verzameling Ψ heeft geen model dus volgens de compactheidsstelling is er een eindige $\Psi_0 \subseteq \Psi$ die ook onvervulbaar is. Noem de bijbehorende indexverzameling Φ_0.
Stel dat

$$\Sigma \neq \bigcup_{\varphi \in \Phi_0} X_\varphi.$$

Dan is er een $\mathfrak{A}_\chi$ zodat $\mathfrak{A} \not\models \varphi$ voor alle $\varphi \in \Phi_0$. Dit betekent precies dat $\mathfrak{A}_\chi$ een model is voor Ψ_0.

Opgave 4

Voor elke vervulbare verzameling Φ van S-zinnen zij $\mathfrak{A}_S$ een S-structuur zodat $\mathfrak{A}_\Phi \models \Phi$. Definieer $\Sigma = \{\mathfrak{A}_\Phi : \Phi \subseteq L_0^S \text{ zodat } \mathrm{Sat}(\Phi)\}$ en $X_\varphi = \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

(c) Stel dat $\Sigma = \bigcup_{\varphi \in \Phi} X_\varphi$. Definieer $\Psi = \{\neg\varphi : \varphi \in \Phi\}$. Ik claim dat Ψ dan niet vervulbaar is. Stel dat wel $\mathrm{Sat}(\Psi)$ geldt. Dan is er een $\mathfrak{A}_\Psi \in \Sigma$ zodat $\mathfrak{A}_\Psi \models \Psi$, maar dan geldt $\mathfrak{A}_\Psi \not\models \varphi$ voor alle $\varphi \in \Phi$. De structuur $\mathfrak{A}_\Psi$ kan dus in geen enkele X_φ zitten. Dit is strijdig met $\Sigma = \bigcup_{\varphi \in \Phi} X_\varphi$.
De verzameling Ψ heeft geen model dus volgens de compactheidsstelling is er een eindige $\Psi_0 \subseteq \Psi$ die ook onvervulbaar is. Noem de bijbehorende indexverzameling Φ_0.
Stel dat

$$\Sigma \neq \bigcup_{\varphi \in \Phi_0} X_\varphi.$$

Dan is er een $\mathfrak{A}_\chi$ zodat $\mathfrak{A} \not\models \varphi$ voor alle $\varphi \in \Phi_0$. Dit betekent precies dat $\mathfrak{A}_\chi$ een model is voor Ψ_0. Dit is een tegenspraak, dus $\Sigma = \bigcup_{\varphi \in \Phi_0} X_\varphi$.

Opgave 4

Voor elke vervulbare verzameling Φ van S-zinnen zij $\mathfrak{A}_S$ een S-structuur zodat $\mathfrak{A}_\Phi \models \Phi$. Definieer $\Sigma = \{\mathfrak{A}_\Phi : \Phi \subseteq L_0^S \text{ zodat } \mathrm{Sat}(\Phi)\}$ en $X_\varphi = \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

(c) Stel dat $\Sigma = \bigcup_{\varphi \in \Phi} X_\varphi$. Definieer $\Psi = \{\neg\varphi : \varphi \in \Phi\}$. Ik claim dat Ψ dan niet vervulbaar is. Stel dat wel $\mathrm{Sat}(\Psi)$ geldt. Dan is er een $\mathfrak{A}_\Psi \in \Sigma$ zodat $\mathfrak{A}_\Psi \models \Psi$, maar dan geldt $\mathfrak{A}_\Psi \not\models \varphi$ voor alle $\varphi \in \Phi$. De structuur $\mathfrak{A}_\Psi$ kan dus in geen enkele X_φ zitten. Dit is strijdig met $\Sigma = \bigcup_{\varphi \in \Phi} X_\varphi$. De verzameling Ψ heeft geen model dus volgens de compactheidsstelling is er een eindige $\Psi_0 \subseteq \Psi$ die ook onvervulbaar is. Noem de bijbehorende indexverzameling Φ_0. Stel dat

$$\Sigma \neq \bigcup_{\varphi \in \Phi_0} X_\varphi.$$

Dan is er een $\mathfrak{A}_\chi$ zodat $\mathfrak{A} \not\models \varphi$ voor alle $\varphi \in \Phi_0$. Dit betekent precies dat $\mathfrak{A}_\chi$ een model is voor Ψ_0. Dit is een tegenspraak, dus $\Sigma = \bigcup_{\varphi \in \Phi_0} X_\varphi$. $\square$

Breinkraker

Waarom kozen we voor elke vervulbare Φ een representant $\mathfrak{A}_\Phi$ in plaats van simpelweg $\Sigma = \mathrm{Mod}(\emptyset)$ te kiezen?