



# Wiskunde logica

Werkcollege 9

Jolien Oomens  
11 april 2017

## Opgave 2

Zij  $\mathfrak{K}$  een  $\Delta$ -elementaire klasse van structuren. Laat zien dat de klasse  $\mathfrak{K}^\infty$  van structuren in  $\mathfrak{K}$  met een oneindig domein ook  $\Delta$ -elementair is.

We weten dat er een  $\Phi$  is zodat

$$\mathfrak{K} = \text{Mod}(\Phi).$$

Neem nu  $\varphi_n$  opnieuw de formule die zegt dat een structuur  $n$  of meer punten heeft. Dan hebben we

$$\mathfrak{K}^\infty = \text{Mod}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n \cup \Phi\right),$$

dus  $\mathfrak{K}^\infty$  is  $\Delta$ -elementair. □



## Opgave 1

Zij  $S$  een symbolverzameling. (a) Bewijs dat de verzameling van alle eindige  $S$ -structuren niet  $\Delta$ -elementair is. (b) Bewijs dat de verzameling van alle oneindige  $S$ -structuren  $\Delta$ -elementair is maar niet elementair.

Zij  $\varphi_n$  de formule die aangeeft dat  $|A| \geq n$ .

(a) Stel van wel, dan is er een  $\Phi$  zodat

$$\text{Mod}(\Phi) = \{\mathfrak{A} : |A| < \infty\}.$$

Bekijk nu  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n \cup \Phi$ . Elke eindige deelverzameling heeft een model, dus volgens de compactheidsstelling heeft deze verzameling een model. Er is dus een oneindige structuur die  $\Phi$  waarmaakt. Tegenspraak. □

(b) Er geldt  $\text{Mod}(\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}) = \{\mathfrak{A} : |A| = \infty\}$ . Stel dat de verzameling elementair is. Dan is er een  $\varphi$  zodat

$$\text{Mod}(\{\varphi\}) = \{\mathfrak{A} : |A| = \infty\},$$

maar dan geldt  $\text{Mod}(\{\neg\varphi\}) = \{\mathfrak{A} : |A| < \infty\}$ . Tegenspraak. □



## Opgave 3

Bewijs met Zorns lemma dat elk ideaal ongelijk aan  $\mathcal{R}$  bevat is in een maximaal ideaal.

Zij  $I \subsetneq \mathcal{R}$  een ideaal. We bekijken de poset

$$V = \{I \subseteq J \subsetneq \mathcal{R} : J \text{ een ideaal}\}.$$

Zij  $K \subseteq V$  een ketting. Dan is de vereniging  $B = \bigcup_{J \in K} J$  opnieuw een ideaal:

- 1  $B \supseteq I \neq \emptyset$
- 2  $B$  is gesloten onder optelling.
- 3 Voor  $b \in B$  en  $r \in \mathcal{R}$  is er een  $J \in K$  zodat  $b \in J$  en omdat dit een ideaal is geldt ook  $a \cdot r \in J \subseteq B$  en  $r \cdot a \in J \subseteq B$ .

Merk op dat  $1 \notin J$  voor alle  $J \in K$ , dus ook  $1 \notin B$  waardoor  $B$  niet de hele ring is. We zien dat  $B \in V$  een bovengrens is. Er is dus een maximaal element  $M \in V$ . Dit is een maximaal ideaal omdat  $M \neq \mathcal{R}$ . □



## Opgave 4

Voor elke vervulbare verzameling  $\Phi$  van  $S$ -zinnen zij  $\mathfrak{A}_S$  een  $S$ -structuur zodat  $\mathfrak{A}_\Phi \models \Phi$ . Definieer  $\Sigma = \{\mathfrak{A}_\Phi : \Phi \subseteq L_0^S \text{ zodat } \text{Sat}(\Phi)\}$  en  $X_\varphi = \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$ .

(a) We hebben

$$\begin{aligned} X_{\varphi \wedge \psi} &= \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi \wedge \psi\} \\ &= \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi \text{ en } \mathfrak{A} \models \psi\} \\ &= \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi\} \cap \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \psi\} \\ &= X_\varphi \cap X_\psi. \end{aligned}$$

(b) Er geldt

$$\begin{aligned} X_{\neg\varphi} &= \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \neg\varphi\} \\ &= \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \not\models \varphi\} \\ &= \Sigma \setminus \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi\} \\ &= \Sigma \setminus X_\varphi. \end{aligned}$$



## Opgave 4

Voor elke vervulbare verzameling  $\Phi$  van  $S$ -zinnen zij  $\mathfrak{A}_S$  een  $S$ -structuur zodat  $\mathfrak{A}_\Phi \models \Phi$ . Definieer  $\Sigma = \{\mathfrak{A}_\Phi : \Phi \subseteq L_0^S \text{ zodat } \text{Sat}(\Phi)\}$  en  $X_\varphi = \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$ .

(c) Stel dat  $\Sigma = \bigcup_{\varphi \in \Phi} X_\varphi$ . Definieer  $\Psi = \{\neg\varphi : \varphi \in \Phi\}$ . Ik claim dat  $\Phi$  dan niet vervulbaar is. Stel dat wel  $\text{Sat}(\Psi)$  geldt. Dan is er een  $\mathfrak{A}_\Psi \in \Sigma$  zodat  $\mathfrak{A}_\Psi \models \Psi$ , maar dan geldt  $\mathfrak{A}_\Psi \not\models \varphi$  voor alle  $\varphi \in \Phi$ . De structuur  $\mathfrak{A}_\Psi$  kan dus in geen enkele  $X_\varphi$  zitten. Dit is strijdig met  $\Sigma = \bigcup_{\varphi \in \Phi} X_\varphi$ . De verzameling  $\Psi$  heeft geen model dus volgens de compactheidsstelling is er een eindige  $\Psi_0 \subseteq \Psi$  die ook onvervulbaar is. Noem de bijbehorende indexverzameling  $\Phi_0$ . Stel dat

$$\Sigma \neq \bigcup_{\varphi \in \Phi_0} X_\varphi.$$

Dan is er een  $\mathfrak{A}_\chi$  zodat  $\mathfrak{A}_\chi \not\models \varphi$  voor alle  $\varphi \in \Phi_0$ . Dit betekent precies dat  $\mathfrak{A}_\chi$  een model is voor  $\Psi$ . Dit is een tegenspraak, dus  $\Sigma = \bigcup_{\varphi \in \Phi_0} X_\varphi$ . □



## Breinkraker

Waarom kozen we voor elke vervulbare  $\Phi$  een representant  $\mathfrak{A}_\Phi$  in plaats van simpelweg  $\Sigma = \text{Mod}(\emptyset)$  te kiezen?

